М. В. Булаєнко

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Конспект лекцій

Харків – ХНАМГ – 2011

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

М. В. Булаєнко

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Конспект лекцій

з дисципліни " Теорія ймовірностей і математична статистика "

(для студентів 2 курсу денної і заочної форм навчання освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр, напряму підготовки 6.070101 "Транспортні технології (за видами транспорту)")

Харків ХНАМГ 2011

Булаєнко М. В. Теорія ймовірностей. Конспект лекцій з дисципліни "Теорія ймовірностей і математична статистика" (для студентів 2 курсу денної і заочної форм навчання освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр, напряму підготовки 6.070101 "Транспортні технології (за видами транспорту)") / М. В. Булаєнко; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва. – Х.: ХНАМГ, 2011. –174 с.

Конспект лекцій побудовано за вимогами кредитно-модульної системи організації навчального процесу і узгоджена з орієнтовною структурою змісту навчальної дисципліни, рекомендованою Європейською Кредитно-Трансферною Системою (ECTS).

Посібник містить всі розділи курсу "Теорія ймовірностей і математична статистика ". Наведені розвязки типових прикладів і задач. Дані основні математичні поняття й методи, що застосуються для розв'язання практичних задач в менеджменті і економіці. Матеріал доступне для самостійного засвоєння.

Рекомендована для студентів спеціальності менеджмент.

Рецензент: д-р техн. наук, проф. *Самойленко М. І.* (Харківської національної академії міського господарства)

Затверджено на засіданні кафедри прикладної математики і інформаційних технологій, протокол №9 від 24.03.2009 р.

З М І С Т

ПЕРЕДМОВА

Цей конспект лекцій призначений для студентів денної і дистанційної форм навчання спеціальностей менеджменту, які прослухали загальний курс вищої математики. Конспект може служити основою даного курсу для студентів та посібником для бажаючих познайомитись з теорією ймовірностей самостійно.

У даному конспекті лекцій поруч з основними результатами, що традиційно викладаються в курси, розглянуто ряд питань, що мають прикладний інтерес. Посібник містить велику кількість прикладів і прикладних задач.

Конспект лекцій складається з семи глав і додатків. Глави розбиваються на розділи, а ті в свою чергу на пункти. Номер розділу складається з номера глави і порядкового номера розділу в даній главі. Номер визначення складається з номера глави і порядкового номера визначення в даній главі. Номер рисунка також складається з номера глави і порядкового номера в даній главі. Формули нумеруються так само, як і рисунки.

В С Т У П

Это учение, объединяющее точность математических доказательств с неопределенностью случая и примиряющее эти, казалось бы, противоречивые элементы, с полным правом может претендовать на титул − математика случайного.

Блез Паскаль

Вивчаючи події і явища навколишнього нас світу, ми переконуємося в існуванні зв'язків між явищами в нім. Одні з них є слідством (результатом) інших і, у свою чергу, служать причиною третіх. Вдивляючись в гігантський вир взаємозв'язаних явищ, можна зробити два важливі виводи:

− по-перше, разом з абсолютно певними, однозначними (*строго детермінованими*, від латинського *determinare* − "визначати") наслідками зустрічаються неоднозначні, випадкові (*недетерміновані*) результати;

− по-друге, неоднозначні результати зустрічаються значно частіше, ніж однозначні.

Є думка, що існують лише випадкові зв'язки, і якщо міра випадковості невелика, то можна вважати, що ми маємо справу з детермінованими зв'язками між явищами.

З випадковими подіями ми зустрічаємося значно частіше, ніж це зазвичай прийнято рахувати. Так, випадковий набір виграшних номерів в накладі спортлото. Випадковий результат зустрічі двох спортивних команд одного і того ж класу. Кількість сонячних днів в даній місцевості змінюється від року до року випадковим чином. Сукупність випадкових чинників лежить в основі будь-якого процесу масового обслуговування − телефонного зв'язку, торгівлі, транспортних послуг, медичній допомозі і так далі

До своєї книги "Вероятность в играх и развлечениях" М. Глеман і Т. Варга пишуть: "Сталкиваясь со случайной ситуацией, маленькие дети думают, что *можно предсказать* ее исход; становись немного постарше, они отвечают, что *ничего нельзя утверждать*; но мало-помалу они открывают, что за кажущимся хаосом мира случайности *можно обнаружить законы*, которые позволяют неплохо ориентироваться в реальности".

Прикладної розділ вищої математики предметом вивчення якого є випадкові явища отримав назву “Теорія ймовірностей”.

По словах Б.В. Гнеденко “Теория вероятностей, подобно другим разделам математики, развилась из потребностей практики; в абстрактной форме она отображает закономерности, присущие событиям массового характера, Эти закономерности играют чрезвычайно важную роль в физике и других отраслях естествознания, военного дела, разнообразных технических дисциплинах, экономике и т. п.”.

Таким чином, ***“Теорія ймовірностей”*** являє собою математичну дисципліну, що вивчає закономірності випадкових масових явищ.

Предметом “Теорії ймовірностей” є вивчення стохастичних закономірностей однорідних випадкових масових явищ.

Методи “Теорії ймовірностей” широко застосовуються в таких галузях природознавства і техніки, як: теорії надійності; теорії масового обслуговування; теорії стрілянини; теорії похибок; теорії автоматизованого управління; теорії ігор; загальній теорії зв'язку; теорії розпізнавання образів; радіолокаційній техніці; стохастичному програмуванні; теоретичній фізиці; генетиці; геодезії; астрономії; медичній і технічній діагностиках; і в інших теоретичних і прикладних науках.

“Теорія ймовірностей” лежить в основі іншої прикладної дисципліни – “Математичної статистики”, методи і засоби аналізу якої , у свою чергу, використовуються при плануванні й організації виробництва, при аналізі технологічних процесів, при планово-попереджувальному ремонті, контролі якості продукції і т. п.

Отже, ***“Теорія ймовірностей і математична статистика”*** являє собою прикладну математичну дисципліну, що вивчає кількісні і якісні методи й засоби аналізу закономірностей еволюції систем, які розвиваються в умовах стохастичної невизначеності.

1. ВИПАДКОВІ ПОДІЇ

1.1. Класичне визначення ймовірності

1.1.1. Основні визначення

"Теорія ймовірностей" вивчає математичну модель випробування (досліду, експерименту), наслідок якого неможливо передбачити. При цьому припускається, що таке випробування може бути повторено необмежену кількість разів при незмінних основних умовах. Комплекс другорядних умов, які неможливо проконтролювати, змінюється від випробування до випробування. Саме ці умови приводять до того, що результати однотипних випробувань можуть бути різними.

Визначення 1.1. Під ***експериментом*** (випробуванням, дослідом) розуміють деяку сукупність дій, яка може бути повторена в однотипних (незмінних основних) умовах необмежене число разів.

Визначення 1.2. ***Подією*** називається усякий факт, який в результаті експерименту може відбутися або не відбутися.

Позначаються події заголовними буквами латинського алфавіту: ***A, B, C.***

Приклад 1.1. : експеримент – кидок монети;
основні умови – симетричність монети;
другорядні умови – сила кидка, швидкість вітру, опір повітря, вологість і т. д.;
події – випадання "орла" або "решки".

Експеримент – проведення лекції;
основні умови – періодичність, місце проведення, лектор;
другорядні умови – робочий тиждень, наявність мультимедійної установки в аудиторії і т. д.;
подія – присутність студента на лекції.

Визначення 1.3. ***Елементарною подією*** називається один з взаємовиключних один одного результатів експерименту.

Позначаються елементарні події малими буквами латинського або грецького алфавітів: ***a,b,c, ά, β, ω.***

Визначення 1.4. Множина всіх результатів експерименту, що розглядається називається ***простором елементарних подій.*** (см. уточнення на стр. 15)

Позначається простір елементарних подій **Ω.**

При цьому кожному результату експерименту ставиться у відповідність лише одна і тільки одна точка простору елементарних подій **Ω.**

Усі події можна розділити на три види**:**

1. достовірні;
2. неможливі;
3. випадкові.

Визначення 1.5. ***Достовірною*** називається подія, яка в результаті експерименту неодмінно повинна відбутися (позначається: **U**).

Визначення 1.6. ***Неможливою*** називається подія, яка в результаті експерименту не може відбутися (позначається: **Ø**).

Визначення 1.7. ***Випадковою*** називається подія, яка при багаторазовому повторенні експерименту в одних виходах відбувається, а в інших – ні.

Для всякої випадкової події ***A*** і кожної елементарної події ***ω*** можна сказати, сприяє чи ні елементарна подія ***ω*** появі випадкової події ***A.*** Подію ***A*** можна розглядати як підмножину **Ω,** яка складається з тих точок ***ω,*** які сприяють появі події ***A.***

Множина **Ω** може бути як дискретною (складається із скінченної або зчисленної кількості точок), так і неперервною (складається із незчисленної кількості точок).

Приклад 1.2. Розглянемо експеримент однократне підкидання монети.

Дослід : кидок монети.

Елементарні події : ω_1 – випадання герба *(Г)*,

ω_2 – випадання цифри *(Ц)*.

Простір елементарних подій: **Ω** = $\{\omega_1, \omega_2\}$.

Випадкові події: A_1 – випала *Ц*, $A_1 = \{\omega_1\}$,

A_2 – випал *Г*, $A_2 = \{\omega_2\}$.

Таким чином, елементарна подія **ω₁** сприятлива випадкової події A_1, а елементарна подія **ω₂** сприятлива випадкової події A_2.

Приклад 1.3. Розглянемо експеримент однократне підкидання гральної кісті.

Дослід : кидок кісті.

Елементарні події : ω_1 – випало одне очко,

ω_2 – випали два очки,

ω_3 – випали три очки,

ω_4 – випали чотири очки,

ω_5, ω_6 – випадання п'яти і шести очок відповідно.

Простір елементарних подій: $\mathbf{\Omega} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$.

Випадкові події: A – випало парне число очок, $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$;

B – випало непарне число очок, $B = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$;

C – випало сім очок, C= Ø;

D – випало не більше шести очок;

$D = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\} = U$.

Приклад 1.4. Монета підкидається до першого випадання герба. Простір елементарних подій Ω складається зі **зчисленної кількості** точок ω_i, де через ω_i позначено елементарну подію, що відповідає випаданню цифри *(Ц)* в перших *i-1* підкиданнях монети і герба *(Г)* при *i-му* підкиданню.

$$\mathbf{\Omega} = \{Г,\ ЦГ,\ ЦЦГ,\ ЦЦЦГ,\ \ldots\}.$$

Приклад 1.5. На поверхню столу кидається монета. Результатом експерименту можна вважати координату центру монети (а якщо нам не байдужий кут повороту монети, то можна додати і величину цього кута). Простір елементарних подій — множина точок поверхні столу (у другому випадку − множина пар$\{(x,\ \varphi)\}$, де $x \in R^2$ − точка поверхні столу і $\varphi \in [0,\ 2\pi)$ − кут повороту). Число елементарних результатів такого експерименту **незчисленне**.

Визначення 1.8. Декілька подій називаються ***несумісними***, якщо ніякі дві з них не можуть відбутися одночасно в одному експерименті.

Приклад 1.6. Прикладами ***несумісних*** подій можна відзначити випадіння:

– герба і цифри при одному підкиданні монети;

– парного і непарного числа очок при одному підкиданні грального кубика.

Прикладом ***сумісними*** подій є випадання одного очка і непарного числа очок.

Визначення 1.9. Декілька подій в експерименті називаються ***рівноможливими***, якщо за умовами симетрії експерименту немає підстави вважати появу якоїсь з них більш можливою, ніж появи інших.

Приклад 1.7. Прикладами ***рівноможливих*** подій можна відзначити появу:

– герба і цифри при одному підкиданні монети;

– парного і непарного числа очок при одному підкиданні грального кубика;

– 1, 2, 3, 4, 5, 6 очок при одному підкиданні грального кубика.

Прикладом ***нерівноможливих*** подій є випадіння двох очок і непарного числа очок.

Визначення 1.10. ***Повною групою*** подій називаються декілька попарно несумісних подій таких, що в результаті експерименту одна з них неодмінно повинна відбутися.

Іншими словами, поява хоч би одній з подій із повної групи подій є достовірна подія.

Приклад 1.8. Прикладами ***повної групи*** подій можна відзначити появу:

– герба і поява цифри при одному підкиданні монети;

– чорної і червоної масті при витягуванні карти з колоди;

– парного і непарного числа очок при одному підкиданні гральної кістки.

Таким чином, використовуючи визначення повної групи події можна уточнить поняття простора події.

Визначення 1.4. Множина всіх елементарних подій , що складають повну групу несумісних подій, називається ***простором подій.***

Визначення 1.11. Якщо виходи експерименту утворюють повну групу несумісних рівноможливих подій, то вони називаються ***випадками.***

Приклад 1.9. Прикладами ***випадків*** є результати, які полягають у випаданні при однократному кидку грального кубика:

– 1, 2, 3, 4, 5, 6 очок;

– парного і непарного числа очок;

Визначення 1.12. Випадок називається ***сприятливим*** до події, якщо його поява тягне за собою появу цієї події.

Приклад 1.10. Розглянемо експеримент однократне підкидання гральної кісті.

Для випадкової події ***A*** – випадіння парного числа очок, сприятливими будуть тільки три випадки: випадіння 2, 4, 6 очок;

A= $\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$.

1.1.2. Класичне визначення ймовірності

Ймовірність події є число, що характеризує чисельну міру об'єктивної можливості появи події в результаті експерименту.

Визначення 1.13. ***Ймовірністю*** події ***A*** називають відношення кількості випадків, що сприятливі до події ***A***, до загальної кількості випадків у даному експерименті.

Ймовірності подій ***A*** прийнято події позначати ***P(A)***.

$$P(A) = \frac{m}{n} \quad , \tag{1.1}$$

де m − кількість випадків, що сприятливі до події ***A,***

n − загальна кількість випадків у даному експерименті.

Співвідношення (1.1) є **класичною формулою** обчислення ймовірності подій, які можуть виникати в результаті експерименту з виходами, що підпадають під визначення випадків.

Ймовірність **довільної** події лежить у межах від нуля до одиниці:

$$0 \le P(A) \le 1 .$$

Останнє співвідношення часто називають **шкалою ймовірностей**.

Ймовірність **достовірної** події дорівнює одиниці: $P(U) = 1$.

Ймовірність **неможливої** події дорівнює нулю: $P(\varnothing) = 0$.

Задача 1.1. Визначити ймовірність появи герба при одному кидку монети.

Розв'язання. Дослід : кидок монети.

Випадкова подія ***A*** – поява герба при одному підкиданні монети.

Елементарні події : $\boldsymbol{\omega_1}$ – випадіння герба (Г),

$\boldsymbol{\omega_2}$ – випадіння цифри (Ц).

Можливі результати досліду несумісні, рівноможливі і утворюють повну групу подій.

Загальна кількість випадків у даному експерименті. ***n***=2

Кількість сприяючих випадків ω_1 рівна 1; ***m***=1.

Шукана ймовірність *P(A)* – ймовірність події ***A***

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{2}.$$

Задача 1.2. Визначити ймовірність того, що при киданні гральній кісті випаде не менше 5 очок.

Розв'язання. Випадкова подія ***A*** – випаде не менше (≥) 5 очок.

Елементарні події : $\boldsymbol{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6}$

Результати $\boldsymbol{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6}$ – несумісні, рівноможливі і утворюють повну групу подій; ***n***=6.

Кількість сприяючих випадків: $\boldsymbol{\omega_5, \omega_6}$, ***m***=2.

Шукана ймовірність $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$

Задача 1.3 Розглянемо експеримент з киданням гральної кістки. Треба визначити ймовірність випадіння парного числа очок.

Розв'язання. Випадкова подія ***A*** – випаде парне число очок.

Як випадки при киданні гральної кістки розглядаємо групу подій: $\boldsymbol{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6}$ – випадіння 1, 2, 3, 4, 5 і 6 очок (несумісні, рівноможливі і утворюють повну групу подій).

Тоді загальне число випадків в експерименті – ***n***=6.

Число випадків, сприятливих події ***A*** – три: випадіння 2, 4 і 6 очок, ***m***=3.

Шукана ймовірність $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$

Задача 1.4. Відділ технічного контролю знайшов у партії з 1000 приладів 45 бракованих. Визначити ймовірність виготовлення бракованих виробів.

Розв'язання. Випадкова подія $\boldsymbol{A}$ – виготовлення бракованих виробів.

Загальне число випадків в експерименті – 1000 (несумісні, рівноможливі і утворюють повну групу подій), $\boldsymbol{n}$=6.

Число випадків, сприятливих події $\boldsymbol{A}$ – $\boldsymbol{m}$=45.

Шукана ймовірність $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{45}{1000}=0{,}045$.

Задача 1.5. З урни, що містить 2 білих і 3 чорних кулі, навмання витягують 2 кулі. Знайти ймовірність того, що одна виявіться білою.

Розв'язання. Випадкова подія $\boldsymbol{A}$ – серед двох вийнятих куль одна біла.

Пронумеруємо кулі:

1 2 3 4 5

Загальне число випадків в експерименті складається з пар вийнятих куль: (1 – 2), (2 – 3), (3 – 4), (4 – 5).
(1 – 3), (2 – 4), (3 – 5),
(1 – 4), (2 – 5),
(1 – 5),

Загальне число випадків $\boldsymbol{n}$=10 (несумісні, рівноможливі і утворюють повну групу подій).

Число випадків, сприятливих події $\boldsymbol{A}$:

(1 – 3), (2 – 3),
(1 – 4), (2 – 4),
(1 – 5), (2 – 5), $\boldsymbol{m}$=6.

Шукана ймовірність $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{6}{10}=0{,}6$.

Задача 1.6. У урні є $\boldsymbol{a}$ білих і $\boldsymbol{b}$ чорних куль. З урни навмання витягли одну кулю. Знайти ймовірність витягання:

а) білої кулі (подія $\boldsymbol{A}$);

б) чорної кулі (подія $\boldsymbol{B}$).

Розв'язання. Загальне число випадків в експерименті складається з даної кількості куль (несумісні, рівноможливі і утворюють повну групу подій)

$\boldsymbol{n}=(a+b).$

а) число випадків, сприятливих події $\boldsymbol{A}$: $\boldsymbol{m}=a$.

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{a}{a+b}.$$

б) число випадків, сприятливих події $\boldsymbol{B}$: $\boldsymbol{m}=b.$

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{b}{a+b}.$$

Задача 1.7. З трьох літер розрізної абетки складене слово “КІТ”. Дитина, що не вміє читати, розсипала літери, а потім зібрала їх у довільному порядку. Знайти ймовірність того, що знову утворилося слово “КІТ”.

Розв'язання. У цієї задачі кількість випадків визначається кількістю можливих перестановок літер, з яких складається слово “КІТ”:

КІТ, ІТК, ТКІ,

КТІ, ІКТ, ТІК.

Число випадків, сприятливих події $\boldsymbol{A}$: $\boldsymbol{m}=1$.

Шукана ймовірність $P(A)=\dfrac{m}{n}=\dfrac{1}{6}$.

При великої кількості можливих результатів експерименту, процедури прямого перебору малоефективні. На допомогу приходить розділ математики комбінаторика, яка забезпечує нас формулами підрахунку кількості можливих з'єднань елементів.

1.2. Елементи комбінаторики

1.2.1. Основні принципи комбінаторики

Визначення 1.14. ***Комбінаторика*** – це розділ математики, в якому вивчаються кількісні характеристики різних видів з'єднань елементів, незалежно від природи самих елементів.

Суттєву роль при підрахунках кількості результатів експерименту грають комбінаційні методи, основою яких є два наступних правила.

Визначення 1.15. Правило додавання

Нехай ***k*** **взаємно заперечні** дії можна виконати відповідно n_1, n_2 ,... , n_k способами. Тоді якусь одну з цих дій можна виконати $\boldsymbol{n = n_1 + n_2 + ... + n_k}$ способами.

Визначення 1.16. Правило множення

Нехай потрібно **виконати одна за одною *k*** дії. Нехай першу дію можна виконати n_1 способами, другу – n_2 способами, ... , k-е – n_k способами. Тоді усі ***k*** дії можуть бути виконані $\boldsymbol{n = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k}$ способами.

$$n = \prod_{i=1}^{k} n_i = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k \quad . \tag{1.2}$$

Задача 1.8. Для складання номера підрозділу використовуються цифри 1, 2, 3, 4. Скільки підрозділів можна пронумерувати, якщо один номер повинен складатися не більше , ніж з трьох цифр?

Розв'язання. а) Цифри у номері не повторюються. Для складання тризначного номера потрібно виконати одну за іншою три дії − вибір першої, другої та третьої цифр. Ці вибори можна здійснити відповідно 4, 3 та 2 способами. Отже, на підставі правила множення, тризначних номерів буде N_3=4 3 2=24**.** Аналогічним чином знаходимо кількість двозначних номерів N_2=4 3=12 та однозначних номерів N_1=4. Тепер за правилом додавання знаходимо загальну кількість підрозділів, яку можна занумерувати $N = N_1 + N_2 + N_3 = 24 + 12 + 4 = 40$.

б) Цифри у номері можуть повторюватися. Вибір будь-якої цифри можна здійснити 4 способами. Тому $N = N_1 + N_2 + N_3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 4 = 84$.

1.2.2. Основні види комбінаторних з'єднань

В комбінаториці розрізняють три види різних з'єднань (комбінацій) елементів довільної множини:

1) перестановки;

2) розміщення;

3) сполучення.

Розглянемо послідовно усі види з'єднань і відповідні формули підрахунку їх кількості.

Визначення 1.12. ***Перестановками*** з ***m*** елементів називають такі їх з'єднання, що відрізняються одне від одного порядком входження елементів.

Загальна кількість можливих перестановок з m елементів позначається $\boldsymbol{P_m}$ і визначається виразом

$$P_m = m! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m\,. \tag{1.3}$$

Приклад 1.11. Скласти всі можливі перестановки з трьох елементів ***(a, b, c)***.

Можливі наступні з'єднання: *abc* *bac* *cab* *acb* *bca* *cba*

$$P_3 = 3! = 1{\cdot}2{\cdot}3 = 6.$$

Приклад 1.12. Скількома способами можна розташувати на полиці в ряд чотири різні книги.

Розв'язання. Загальна кількість можливих способів розташування книг визначається відповідно до виразу (1.3): $P_3 = 4! = 24$.

Легко помітити, що такий же результат можна одержати, застосовуючи правило множення.

На перше місце на полицю можна поставити будь-яку з 4 книг $n_1 = 4$ способи, після чого на друге місце – будь-яку з трьох , що залишилися $n_2 = 3$ способи**,** потім – будь-яку з двох, $n_3 = 2$ способи**,** на останнім четвертому місці буде стояти остання не розміщена книга $n_4 = 1$**. З**а правилом множення отримуємо $N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ способів. Таким чином, правило множення можна вважати логічним обґрунтуванням формули (1.3).

Визначення 1.13. ***Розміщеннями*** з ***n*** елементів по ***m*** називають такі з'єднання m елементів, що відрізняються одне від одного принаймні одним новим елементом або порядком їх входження $(m \le n)$.

Загальна кількість можливих розміщень з ***n*** елементів по ***m*** позначається A_n^m. і визначається виразом

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \qquad (1.4)$$

Приклад 1.13. Скласти всі можливі розміщення з трьох елементів *(a, b, c)* по 2 елементи.

Можливі наступні з'єднання: *ab* *ac* *bc*

ba *ca* *cb*.

$$\mathrm{A}_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{6}{1} = 6.$$

Приклад 1.14. . Скількома способами можна вибрати дві книги з чотирьох і розташувати їх у ряд на полиці.

Розв'язання. Загальна кількість можливих способів розташування книг визначається відповідно до виразу (1.4): $A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{24}{2} = 12$.

Визначення 1.14. ***Сполученнями*** з ***n*** елементів по ***m*** називають такі з'єднання *m* елементів, що відрізняються одне від одного принаймні одним новим елементом, порядок їх входження не враховується $(m \le n)$.

Загальна кількість можливих сполучень з ***n*** елементів по ***m*** позначається C_n^m. і визначається виразом

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{(n-m)! \cdot m!}. \qquad (1.5)$$

Приклад 1.15. Скласти всі можливі сполучення з трьох елементів *(a, b, c)* по 2 елементи.

Можливі наступні з'єднання: *ab* *ac* *bc*

$$\mathrm{C}_3^2 = \frac{3!}{(3-2)! \cdot 2!} = \frac{3!}{1! \cdot 2!} = \frac{6}{2} = 3.$$

Приклад 1.16. Скількома способами можна вибрати дві книги з чотирьох.

Розв'язання. Загальна кількість можливих способів вибору книг визначається відповідно до виразу (1.5): $C_4^2 = \dfrac{4!}{(4-2)!2!} = \dfrac{4!}{2!\cdot 2!} = 6$.

При вирішенні ряду задач можуть бути корисними наступні співвідношення:

$$0! = 1; \qquad 1! = 1; \tag{1.6}$$

$$C_n^m = C_n^{n-m}; \tag{1.7}$$

$$P_m = \frac{A_n^m}{C_n^m}; \tag{1.8}$$

$$C_n^0 = 1; \qquad C_n^n = 1; \qquad C_n^1 = C_n^{n-1} = n. \tag{1.9}$$

1.2.3. Приклади комбінаторних задач

Приклад 1.17. З п'ятьох літер розрізної абетки складене слово "СПОРТ". Дитина, що не вміє читати, розсипала літери, а потім зібрала їх у довільному порядку. Знайти ймовірність того, що знову утворилося слово "СПОРТ".

Розв'язання. Загальну кількість усіх можливих виходів експерименту знайдемо як кількість перестановок з 5 літер, тобто з 5 елементів: $n = P_5 = 5! = 120$. Усі виходи утворюють повну групу несумісних рівноможливих випадків, з котрих тільки один сприятливий до відновлення слова "СПОРТ".

Отже, шукана ймовірність $P(A) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{1}{120}$.

Приклад 1.18. У коробці лежать 9 білих і 4 чорних кулі. Виймають навмання дві кулі. Знайти ймовірність того, що вони:

а) білі (подія ***A***);

б) чорні (подія ***B***);

в) різнокольорові (подія ***C***);

г) обидві білі або обидві чорні (подія ***D***).

Розв'язання. Для вирішення задачі використовуємо *класичну формулу ймовірності* (1.1)

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

Загальна кількість випадків ***n*** в експерименті – це кількість комбінацій по 2 кули з загальної кількості 9+4=13 куль, тобто

$$n = C_{13}^2 = \frac{13!}{(13-2)!2!} = \frac{13!}{11!\cdot 2!} = \frac{12 \cdot 13}{2} = 78.$$

Кількості сприятливих випадків для кожної з подій ***A****,* ***B****,* ***C****,* ***D*** позначимо відповідно m_A, m_B, m_C, m_D.

а) Для події ***A*** m_A – це кількість різних комбінацій по 2 кулі з 9 білих куль, тобто $m_A = C_9^2 = 36$.

Таким чином, $P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{36}{78} = \frac{6}{13}$.

б) Для події ***B*** m_B – це кількість різних комбінацій по 2 кулі з 4 чорних куль, тобто $m_B = C_4^2 = 6$.

$P(B) = \frac{m_B}{n} = \frac{6}{78} = \frac{1}{13}$.

в) Для події ***C*** m_C визначається відповідно до правила множення: $m_A = 4 \cdot 9 = 36$.

$P(C) = \frac{m_C}{n} = \frac{36}{78} = \frac{6}{13}$.

г) Для події ***D*** $m_D = m_A + m_B = 36 + 6 = 42$.

$P(D) = \frac{m_D}{n} = \frac{42}{78} = \frac{7}{13}$.

Приклад 1.19. З шістьох літер розрізної абетки складене слово "МОЛОКО". Літери розсипали, а потім зібрали їх у довільному порядку. Знайти ймовірність того, що знову утворилося слово "МОЛОКО".

Розв'язання. Загальне кількість випадків в експерименті ***n*** $= P_6$ = 6!=720, число сприятливих випадків $m = P_3 = 3! = 6$, так як букви "О", що повторюються, можна дозвільно переставляти між собою.

Шукана ймовірність $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{720} = \frac{1}{120}$.

1.3. Алгебра подій

1.3.1. Операції над подіями

Прості випадкові події можуть утворювати складні події, а складні – ще більш складні. Наприклад, подія –випадіння парного числа очок при кидку грального кубику, утворюється з трьох простих випадкових подій: A_2 – випадіння 2 очок, A_4 – випадіння 4 очок, A_6 – випадіння 6 очок.

Теорія ймовірностей, дає можливість за відомими ймовірностями простих подій розраховувати ймовірності складних подій.

Для розкладання або утворювання складних подій необхідно застосовувати дві операції над подіями: додавання і множення.

Визначення 1.15. ***Сумою*** двох подій $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ називають таку подію $\boldsymbol{C}$, що відбувається тоді, коли відбувається або подія A, або подія B, або події A і B одночасно в одному експерименті.

Суму подій A і B прийнято записувати в такий спосіб:

$$\boldsymbol{C = A + B} \quad \text{або} \quad \boldsymbol{C = A \cup B}.$$

Операція додавання має місце, коли прості події об'єднуються в складну з використанням сполучника "**або**".

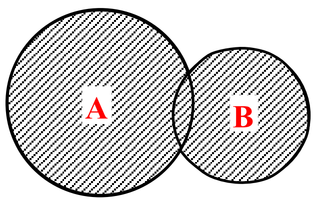


рис. 1.1

На рис. 1.1 дана графічна інтерпретація операції додавання подій .A і B. Тут область A є множиною точок, які відповідають елементарним виходам експерименту, що сприяють події A; область B – події B; заштрихована область $\boldsymbol{C = A + B}$ – принаймні одній з подій A і B.

Операція додавання може бути узагальнена на додавання декількох подій.

Визначення 1.16. ***Сумою декількох подій*** називають подію, що полягає у появі принаймні однієї з цих події.

Приклад 1.20. Розглянемо експеримент вибір карти з колоди. Позначимо події:

$\boldsymbol{A}$ – поява трефової масті

$\boldsymbol{B}$ – поява трефової масті

Тоді складна подія **C=A+B** полягає в появі трефової масті (***A***) або туза (***B***).

Приклад 1.21. Розглянемо експеримент кидок грального кубика. Позначимо події:

A – випадіння непарного числа очок, ***A***=$\{a_1, a_3, a_5\}$

B – випадіння числа очок, кратного трьом, ***B***=$\{a_3, a_6\}$.

Тоді подія ***C***– випадіння непарного числа очок або числа очок, кратного трьом, буде сумою подій А і В.

$$C=A+B=\{a_1, a_3, a_5, a_6\}.$$

Визначення 1.17. ***Добутком*** двох подій ***A*** і ***B*** називають таку подію ***C*,** що відбувається тоді, коли відбувається і подія *A,* і подія *B* одночасно в одному експерименті.

Добуток подій *A* і *B* прийнято записувати в такий спосіб:

$$C = A \cdot B \qquad \text{або} \qquad C = A \cap B.$$

Операція множення має місце, коли прості події об'єднуються в складну з використанням сполучника "**і**".

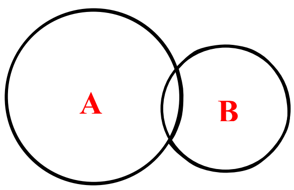


Рис.1.2

На рис.1.2 дана графічна інтерпретація операції множення подій *A* і *B*. Тут область *A* є множиною точок, які відповідають елементарним виходам експерименту, що сприяють події *A*; область *A* – події *B*; заштрихована область $C = A \cdot B$ є множиною точок, які відповідають елементарним виходам експерименту, що одночасно сприяють і події *A*, і події *B.*

Операція множення може бути узагальнена на множення декількох подій.

Визначення 1.18. ***Добутком декількох подій*** називають таку подію **,** що полягає в одночасній появі в одному експерименті всіх подій.

Приклад 1.22. Розглянемо експеримент вибір карти з колоди. Позначимо події:

A – поява трефової масті

B – поява трефової масті

Тоді складна подія $C = A \cdot B$ полягає в появі трефового туза.

Надамо теоретико-множинне тлумачення визначенням., що розглядались раніше.

Визначення 1.19. Декілька подій $A_1, A_2, ..., A_n$ складають ***повну групу події***, якщо їх сума є достовірна подія:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega \ .$$

Визначення 1.20. Дві подій $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ називають ***несумісними***, якщо їх добуток є неможлива подія:

$$A \cdot B = \varnothing \ .$$

Визначення 1.21 . Декілька подій $A_1, A_2, ..., A_n$ називають *попарно несумісними*, якщо поява будь-якого з них не виключає появи кожного з останніх:

$$A_i \cdot A_j = \varnothing \quad при \quad i \neq j.$$

1.3.2. Властивості операцій додавання і множення

Операції додавання і множення подій мають наступні властивості:

1. комутативність:

$$A+B = B+A; \tag{1.10}$$

$$A \cdot B = B \cdot A; \tag{1.11}$$

2. асоціативність:

$$(A+B)+C = A+(B+C); \tag{1.12}$$

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C); \tag{1.13}$$

3. дистрибутивність:

$$A \cdot (B+C) = A \cdot B+A \cdot C. \tag{1 .14}$$

Корисні формули:

– для Ø - події: $A + \varnothing = A ; \quad A \cdot \varnothing = \varnothing \ ;$ (1.15)

– для U- події: $A + U = U ; \quad A \cdot U = A \ ;$ (1.16)

– для випадкової події: $A + A = A; \quad A \cdot A = A \ .$ (1.17)

1.4. Контрольні запитання

1. Що є предметом вивчення Теорії ймовірностей?
2. Дати визначення поняттю подія.
3. Дати визначення поняттю експеримент.
4. Дати визначення поняттю елементарна подія.
5. Дати визначення поняттю ймовірність події.
6. Дати визначення поняттю достовірна подія.
7. Чому дорівнює ймовірність достовірної події?
8. Дати визначення поняттю неможлива подія.
9. Чому дорівнює ймовірність неможливої події?
10. Дати визначення поняттю випадкова подія.
11. Які значення може приймати ймовірність випадкової події?
12. Які випадкові події називаються рівноможливими?
13. Які випадкові події називаються несумісними?
14. Дати визначення поняттю повна група подій.
15. Дати визначення поняттю простір подій.
16. Які випадкові події називаються випадками?
17. Які випадки називаються сприятливими до події?
18. Надати класичну формулу розрахунку ймовірності події?
19. Перестановки. Визначення і формула підрахунку кількість перестановок.
20. Розміщення. Визначення і формула підрахунку кількість розміщень.
21. Сполучення. Визначення і формула підрахунку кількість сполучень.
22. Дати визначення поняттю сума двох подій.
23. Дати визначення поняттю сума декількох подій.
24. Дати визначення поняттю добуток двох подій.
25. Дати визначення поняттю добуток декількох подій.
26. Властивості операцій додавання і множення.

2. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ

2.1. Аксіоми та властивості ймовірності

2.1.1.Частота та статистична ймовірність випадкової події

Класичне визначення ймовірності за формулою (1.1) застосується тільки для класу задач, де всі можливі результати випробування можна звести до схеми випадків. Тобто експеримент є симетричним по відношенню до будь - якого можливого результату. У багатьох реальних задачах ця схема незастосовна. У таких випадках потрібно визначати ймовірність іншім частотним способом.

Частотний підхід до визначення ймовірності полягає в слідуючому. Нехай A − подія, пов'язана з деяким випробуванням. Якщо при n- кратному повторенні випробування подія A наступає n_A разів, то ***частотою*** події A у ***даній серії*** з n випробувань називається відношення $P_n(A) = \frac{n_A}{n}$. Частота випадковим чином змінюється від однієї серії до іншої. Однак, якщо довжини серій достатньо великі, то відповідні частоти мало відрізняються одна від іншої (властивість стійкості частоти) і групуються навколо деякого числа $P(A)$, яке є ***ймовірністю (статистичною ймовірністю)*** події A:

$$P(A) \approx P_n(A) = \frac{n_A}{n}. \qquad (2.1)$$

При зростанні n відхилення $P_n(A)$ від $P(A)$ зменшується для переважної більшості серій. Тому частота може бути використана для обчислення ймовірності.

Приклад 2.1. У серії з 4040 підкидань монети герб випав 2048 разів. Потрібно на підставі цей інформації оцінити імовірність випадання герба.

Розв'язання. Позначимо подію A − випадання герба. У даному випадку загальне число випробувань дорівнює n = 4040, число випробувань, у яких мала місце подія A − n_A = 2048, отже

$$P(A) \approx P_n(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{4040}{2048} = 0{,}5080 \ .$$

Можна побудувати всю теорію ймовірності на понятті частоту, але загально прийнятим нині є аксіоматичний підхід до побудови теорії та розв'язування стохастичних задач, запропонований у 1933 році одним із найбільш визначних математиків нашого століття А.Н. Колмогоровим.

2.1.2. Аксіоми ймовірності та її властивості

На основі вищевикладеного теоретико-множинного трактування подій сформулюємо аксіоми теорії ймовірності.

Нехай кожній події ***A*** ставиться у відповідність деяке *числова функція* ***P(A)*** *– ймовірність події*, яка визначена на множині всіх подій, пов'язаних з даним експериментом.

Вимагатиме, аби ймовірність подій задовольняла наступним аксіомам:

1. *Ймовірність будь-якої події лежіть в межах між нулем і одиницею:*

$$0 \le P(A) \le 1.$$

2. *Якщо A і B несумісні · події (A · B= Ø), то*

$$P(A+B)= P(A)+ P(B). \tag{2.2}$$

Аксіома 2 легко узагальнюється (за допомогою сполучної властивості додавання) на будь-яке число подій: якщо $A_i \cdot A_j = \varnothing$ при $i \neq j$, то

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i), \tag{2.3}$$

тобто ймовірність суми неспільних подій дорівнює сумі їх ймовірності.

Аксіому додавання ймовірностей інколи називають *"теоремою додавання"* (для дослідів, що зводяться до схеми випадків, вона може бути доведена), а також *правилом додавання ймовірностей.*

3. *Якщо є зчисленна множина несумісних подій* $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ ($A_i \cdot A_j = \varnothing$ при $i \neq j$), то

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i). \tag{2.4}$$

Третю аксіому доводиться вводити окремо, оскільки вона не виводиться з другої.

Правило додавання ймовірностей має ряд важливих наслідків.

Наслідок 2.1. Сума ймовірностей повної групи несумісних подій дорівнює одиниці, тобто якщо

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega; \quad A_i \cdot A_j = \varnothing \quad при \quad i \neq j, \text{ то}$$

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1. \tag{2.5}$$

Доведення. Так як події $A_1, A_2, ..., A_n$ несумісні, то на підставі аксіоми 2 одержимо

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = P(\Omega) = 1.$$

Визначення 2.1. Подія $\overline{A}$ називається ***протилежною*** по відношенню до події A, якщо вона полягає в не появі події A і, значить, доповнює її до Ω.

Тобто протилежні події утворюють повну групу несумісних подій.

Приклад 2.2.

1) дослід – постріл по мішені:

   A – попадання в мішень,

   $\overline{A}$ – непопадання в мішень;

2) дослід – підкидання грального кубика:

   A – поява парної цифри,

   $\overline{A}$ – поява непарної цифри;

3) дослід – підкидання монети:

   A – випадання герба,

   $\overline{A}$ – випадання цифри.

Наслідок 2.2. Сума ймовірностей протилежних події дорівнює одиниці, тобто

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1. \tag{2.6}$$

З наслідку 2.2. випливають співвідношення

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}), \tag{2.7}$$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A). \tag{2.8}$$

Ця властивість протилежних подій широко застосовується в теорії ймовірностей, коли буває простіше обчислити ймовірність протилежної події $\overline{A}$, чим ймовірність події A, що цікавить нас.

2.2. Геометричні ймовірності

У випробуваннях з незчисленною кількістю результатів для підрахунку ймовірностей вводять поняття *геометричної ймовірності*.

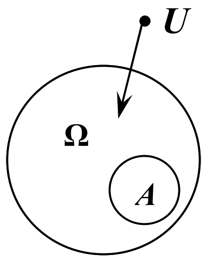


Рис. 2.1

Розглянемо яку-небудь область Ω в просторі $\mathbb{R}^m$ (на прямій, на площині, в просторі). Передбачимо, що *міра* Ω (*довжина, площа, об'єм*, відповідно) скінченна. Нехай випадковий експеримент полягає в тому, що ми навмання кидаємо в цю область точку ***U*** (рис. 2.1). Термін «навмання» тут означає, що ймовірність попадання точки ***U*** в будь-яку частину $A \subset \Omega$ не залежить від форми або розташування A усередині Ω, а залежить лише від *міри* області A (якщо області A вимірна).

Визначення 2.2. Експеримент задовольняє умовам "***геометричного визначення ймовірності***", якщо його результати можна надати у вигляді точок деякої області Ω так, що ймовірність попадання точки ***U*** в будь-яку частину $A \subset \Omega$ не залежить від форми або розташування A усередині Ω, а залежить лише від *міри* області A, отже, пропорційна цей мірі:

$$P(U \in A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}, \tag{2.9}$$

де $\mu(A)$ − *міра* області A.

Якщо для точки ***U***, яка кинута в область Ω, виконані умови *геометричного визначення* ймовірності, то говорять, що точка ***рівномірно розподілена в області*** Ω .

Приклад 2.3. Точка ***U*** навмання кидається на відрізок [0,1]. Ймовірність точці ***U*** попасти в точку $\{0,5\}$ дорівнює нулю, оскільки *міра* множини, яка складається з однієї точки ("довжина точки"), є 0. В той же час попадання в точку $\{0,5\}$ не є неможливою подією — це один з елементарних результатів експерименту.

2.2.1. Задача про зустріч.

Задача 2.1. Дві особи ***B*** і ***C*** умовилися зустрітися у визначеному місці між 14 і 15 годинами дня. Особа, що прийшла першою чекає другу впродовж

10 хвилин, після чого вирушає. Чому дорівнює ймовірність зустрічі цих осіб, якщо кожна з них може прийти у будь-який час протягом вказаної години незалежно від іншої?

Розв'язання. Рахуватимемо інтервал з 14 до 15 годин дня відрізком $[0,1]$ з довжиною 1 година. Нехай $\boldsymbol{x}$ і $\boldsymbol{y}$ — моменти приходу $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$ (точки відрізка $[0,1]$). Всі можливі результати експерименту – множина точок квадрата із стороною 1 (рис. 2.2):

$$\Omega = \{(x,y): 0 \le x \le 1,\quad 0 \le y \le 1\} = [0,\quad 1]\times[0,\quad 1]\ .$$

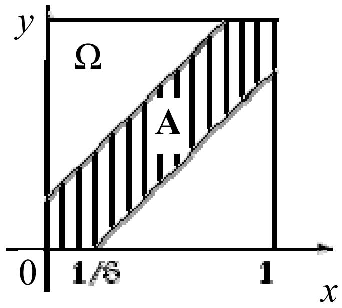


Рис. 2.2

Можна вважати, що експеримент зводиться до кидання точки навмання в квадрат. При цьому сприятливими результатами є точки множини $\boldsymbol{A}$**:** $A = \{(x,y): |x-y| \le 1/6\}$ (10 хвилин = 1/6 години). Тобто попадання у множину $\boldsymbol{A}$ навмання кинутої в квадрат точки $\boldsymbol{U}$ означає, що $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$ зустрінуться. Тоді ймовірність зустрічі дорівнює

$$P(U \in A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{1 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}}{1} = \frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^2}{1} = \frac{11}{36}.$$

2.2.2. Задача Бюффона

Задача 2.2. На площині накреслені паралельні прямі, що знаходяться одна від одної на відстані $2a$. На площину навмання кинута голка довжина якої $2l < 2a$. Яка ймовірність того, що голка пересіче одну з прямих?

Розв'язання. Зрозуміємо, що означає тут "навмання кинута голка". Усі можливі положення голки (відрізки) на площині повністю визначаються положенням середини голки і кутом повороту голки відносно якого-небудь напряму. Причому дві ці змінні (*положення центру* і *кут повороту*) міняються незалежно один від одного (рис. 2.3).

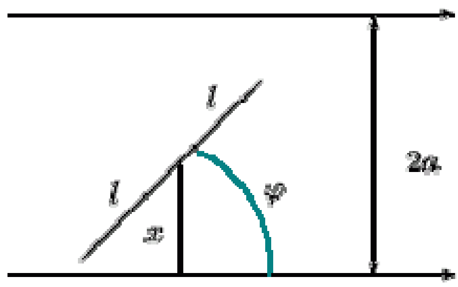


Рис. 2.3

Позначимо через $x \in [0, a]$ відстань від середини голки до найближчої прямої, а через $\varphi \in [0, \pi]$ — кут між якимсь напрямом прямих і голкою. Множина положень голки цілком визначається вибором навмання точки з прямокутника $\Omega = [0, \pi] \times [0, a]$. (рис. 2.4).

Голка пересікає найближчу пряму, якщо координати вибраної навмання точки задовольняють нерівності: $x < l \cdot \sin\varphi$.

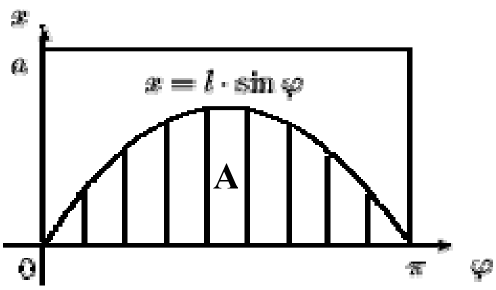


Рис. 2.4

Площа області $A \subset \Omega$, точки якої задовольняють такій нерівності, рівна

$$\mu(A) = \int_0^{\pi} l \cdot \sin\varphi \, d\varphi = -\, l \cdot \cos\varphi \Big|_0^{\pi} = 2l.$$

Оскільки $\mu(\Omega) = a \cdot \pi$, то шукана ймовірність дорівнює

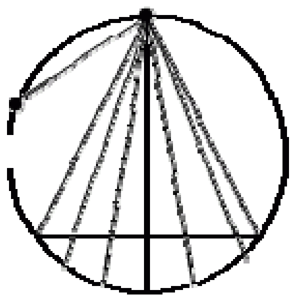
$$P(U \in A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{2l}{a\pi}.$$

2.2.3. Парадокс Бертрана

Задача 2.3. У крузі одиничного радіусу навмання вибирається хорда. Яка ймовірність того, що її довжина буде більша, ніж довжина сторони вписаного в круг правильного трикутника?

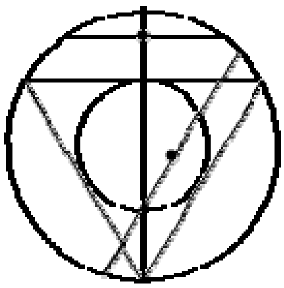
Розв'язання. Є принаймні **три** способи " вибрати навмання хорду в крузі".

1.



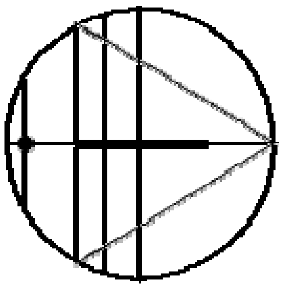
Зафіксуємо одну точку (кінець хорди) на колі і виберемо навмання на колі іншу точку (другий кінець хорди). Тут $\Omega=[0,2\pi]$, а сприятливими є положення другої точки на інтервалі $\left[\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$. Ймовірність отримати " довгу" хорду дорівнює $\frac{1}{3}$.

2.



Існує рівно одна хорда, для якої дана точка в крузі є серединою (окрім того випадку, коли кинута навмання точка попаде в центр круга, але оскільки ймовірність цієї події дорівнює нулю, то врахування або неврахування такої події не впливає на підсумкову ймовірність).
Таким чином, можна вибирати навмання хорду, кидаючи навмання точку (середину хорди) в круг. Тут Ω — круг радіусу 1, $\mu(\Omega)=\pi r^2=\pi$, а сприятливими є положення середини хорди усередині вписаного в трикутник круга (радіусом 1/2) $\mu(A)=\pi r^2=\frac{\pi}{4}$. Ймовірність отримати " довгу" хорду дорівнює відношенню площ кругів, тобто $\frac{1}{4}$.

3.



Нарешті, можна обмежитися розглядом лише хорд, які перпендикулярні якому-небудь діаметру (останні можуть бути отримані поворотом). Тобто експеримент може полягати у виборі середини хорди навмання на діаметрі круга — відрізку завдовжки 2. Сприятливими є положення середини хорди на відрізку завдовжки 1.

Шукана вірогідність для такого експерименту дорівнює $\frac{1}{2}$.

У чому причина різниці у відповідях на, здавалося б, одне і те ж питання? Насправді формулювання завдання не є коректним з математичної точки зору. "Вибір наугад хорди в крузі" може бути по-різному описаний за допомогою геометричного визначення ймовірності (що ми і зробили). Тобто цей "експеримент" можна по-різному описати за допомогою вибору навмання точки в деякій області.

Дійсно, кожному з трьох запропонованих способів вибору хорд можна зіставити конкретний фізичний експеримент (всякий раз інший).

Отже парадокс зникає відразу, як тільки отримана відповідь на питання: що означає " в крузі навмання вибирається хорда"?

2.3. Основні теореми теорії ймовірностей

Основні теореми теорії ймовірностей дозволяють за відомими ймовірностями простих подій визначати ймовірності більш складних подій. До **основних** включають **дві теореми**: теорему додавання ймовірностей і теорему множення ймовірностей.

2.3.1. Теорема додавання ймовірностей

Теорема 2.1. Теорема додавання ймовірностей.

Ймовірність суми двох подій рівна сумі їх ймовірностей мінус ймовірність добутку цих подій:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)\,. \qquad (2.10)$$

Доведення. Нехай виходи досліду утворюють повну групу $\boldsymbol{n}$ несумісних рівноможливих подій (рис.2.5). При цьому

− $\boldsymbol{m}$ з них сприятливі події $\boldsymbol{A}$;

− $\boldsymbol{k}$ з них сприятливі події $\boldsymbol{B}$;

− $\boldsymbol{l}$ з них сприятливі добутку подій $\boldsymbol{A\cdot B}$.

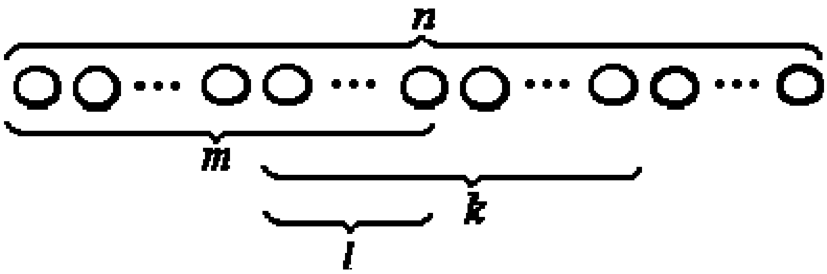


Рис.2.5

Тоді відповідно до класичної формули визначення ймовірності (1.1):

$$P(A)=\frac{m}{n}; \qquad P(B)=\frac{k}{n}; \qquad P(A\cdot B)=\frac{l}{n}.$$

Ймовірність появи події A або B

$$P(A+B)=\frac{m+k-l}{n}.$$

Перетворимо останню рівність:

$$P(A+B)=\frac{m+k-l}{n}=\frac{m}{n}+\frac{k}{n}-\frac{l}{n}=P(A)+P(B)-P(A\cdot B),$$

що і було потрібно довести.

Наслідок теореми 2.1. Ймовірність суми двох несумісних подій A і B дорівнює сумі їх імовірностей.

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \tag{2.11}$$

Наслідок очевидний, оскільки добуток несумісних подій є неможливій події, ймовірність якої дорівнює нулю: $A\cdot B=\varnothing$ і $P(\varnothing)=0$.

Визначення 2.3. Події A і B називаються ***незалежними***, якщо ймовірність події A не залежить від того, відбулася подія B або не відбулася.

Приклад 2.4. Розглянемо експеримент дворазове підкидання монети. Нехай
подія A − поява герба при першому киданні монети.
подія B − поява герба при другому киданні монети.
Події ***A*** і ***B*** **незалежні**.

Приклад 2.5. З урни, що містить 3 білі і 2 чорну кулі, послідовно витягають навмання дві.

Подія A − поява білої кулі при першому вийманні,

подія B − поява білої кулі при другому вийманні.

Події $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ **залежні**, оскільки ймовірність появи білої кулі при другому вийманні буде залежати від того, яка куля була витягнута при першому вийманні. Якщо першою витягнутою кулею була біла, то ймовірність появи білої кулі при другому вийманні дорівнює $\frac{2}{4}$; якщо – чорна, то – $\frac{3}{4}$.

2.3.2. Умовна ймовірність

Визначення 2.4. Для залежних подій A і B ймовірність події B, яка обчислена за умови, що подія A відбулася, називається ***умовною*** ймовірністю і позначається $\boldsymbol{P_A(B)}$ або $\boldsymbol{P(B/A)}$.

Для приклада 2.5.

$$P(A) = \frac{2}{4}, \qquad P(B/A) = \frac{3}{4}.$$

Умовною ймовірність $\boldsymbol{P(B/A)}$ події B за умовами здійснення події A визначається відношенням

$$P(B/A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)}, \tag{2.12}$$

де $P(A) \neq 0$.

Задача 2.1. Ймовірність аварії при запуску ракети дорівнює 0,15**.** Ймовірність аварії на старті є 0,12. Яка ймовірність аварії при умові успішного старту.

Розв'язання. Нехай подія A полягає у тому, що запуск ракети успішний, а подія B – це успішний старт ракети. Із умов задачі випливає, що

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}15 = 0{,}85; \quad P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0{,}12 = 0{,}88;$$

а також що $A \cdot B = A$.

Тоді $P(A/B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{0{,}85}{0{,}88} = 0{,}966$.

Таким чином, $P(\overline{A}/B) = 1 - P(A/B) = 1 - 0{,}966 = 0{,}034$.

Із співвідношення (2.12) випливає теорема множення ймовірностей.

2.3.3. Теорема множення ймовірностей

Теорема 2.2. Теорема множення ймовірностей.

Ймовірність добутку двох подій A і B дорівнює ймовірності події A, помноженої на умовну ймовірність події B за умови, що подія A відбулася, або дорівнює ймовірності події B, помноженої на умовну ймовірність події A за умови, що подія B відбулася

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B). \qquad (2.13)$$

Доведення. Нехай виходи експерименту складають повну групу несумісних рівноможливих подій (рис.2.1). При цьому

− $\boldsymbol{m}$ з них сприятливі події $\boldsymbol{A}$;

− $\boldsymbol{k}$ з них сприятливі події $\boldsymbol{B}$;

− $\boldsymbol{l}$ з них сприятливі добутку подій $\boldsymbol{A \cdot B}$.

Тоді відповідно до класичної формули (1.1)

$$P(A) = \frac{m}{n}; \qquad P(B) = \frac{k}{n}; \qquad P(B/A) = \frac{l}{m}; \qquad P(A/B) = \frac{l}{k}.$$

Ймовірність одночасної появи подій A і B

$$P(A \cdot B) = \frac{l}{n}.$$

Перетворимо останню рівність:

$$P(A \cdot B) = \frac{l}{n} = \frac{l \cdot m}{n \cdot m} = \frac{m}{n} \cdot \frac{l}{m} = P(A)P(B/A), \text{ або}$$

$$P(A \cdot B) = \frac{l}{n} = \frac{l \cdot k}{n \cdot k} = \frac{k}{n} \cdot \frac{l}{k} = P(B)P(A/B).$$

Таким чином, теорему доведено.

Наслідок теореми 2.2. Ймовірність добутку двох незалежних подій A і B дорівнює добутку їх імовірностей

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B). \qquad (2.14)$$

Наслідок очевидний, якщо взяти до уваги, що для незалежних подій умовні ймовірності збігаються з безумовними: $P(A/B) = P(A)$; $P(B/A) = P(B)$.

Наслідок легко узагальнюється на випадок кількох подій.

Задача 2.2. Стрілець робить три постріли по мішені. Ймовірність влучення в мішень у кожному пострілі однакова і дорівнює 0,9 . Знайти ймовірність того, що в мішені буде тільки дві пробоїни

Розв'язання. Введемо позначення:

Подія $\boldsymbol{A}$ – після трьох пострілів в мішені буде лише дві пробоїни;

A_1 – влучення при першому пострілі; $P(A_1)=0{,}9$;

$\overline{A}_1$ – промах при першому пострілі; $P(\overline{A}_1) = 1- P(A_1)=1- 0{,}9=0{,}01$;

A_2 – влучення при другому пострілі; $P(A_2)=0{,}9$;

$\overline{A}_2$ – промах при другому пострілі; $P(\overline{A}_2) = 1 - P(A_2)=1- 0{,}9=0{,}01$;

A_3 –влучення при третьому пострілі; $P(A_3)=0{,}9$;

$\overline{A}_3$ – промах при третьому пострілі; $P(\overline{A}_3) = 1 - P(A_3)=1- 0{,}9=0{,}01$.

З урахуванням введених позначень подію $\boldsymbol{A}$ можна розкласти через прості в такий спосіб:

$$A = A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3 + A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3 + \overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \,.$$

Оскільки доданки в наведеному розкладанні є несумісні події, то ймовірність події $\boldsymbol{A}$ буде дорівнювати сумі ймовірностей цих подій (*наслідок теореми 2.1*):

$$P(A) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3 + A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3 + \overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1 A_2 \overline{A}_3) + P(A_1 \overline{A}_2 A_3) + P(\overline{A}_1 A_2 A_3) \,.$$

Оскільки всі постріли є незалежними між собою, то кожний доданок в останньому виразі можна подати як добуток імовірностей простих подій (*наслідок теореми 2.2*)

$$P(A) = P(A_1)P(A_2)P(\overline{A}_3) + P(A_1)P(\overline{A}_2)P(A_3) + P(\overline{A}_1)P(A_2)P(A_3) =$$

$$= 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 + 0{,}9 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 + 0{,}1 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 3 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 0{,}243.$$

Задача 2.3. Ймовірність влучення у ціль при одному пострілі з першої гармати дорівнює 0,7; з другої – 0,8. Знайти ймовірність ураження цілі при одному залпі з двох гармат.

Розв'язання. Введемо позначення. Нехай $\boldsymbol{A}$ – подія, яка полягає в попаданні в ціль першої гарматою; $\boldsymbol{B}$ – другою. Події, що розглядаються є сумісними й незалежними.

Отже подія $\boldsymbol{C}$ (ураження цілі при залпі) є сумою двох сумісних подій

$$C = A + B \,.$$

Ймовірність події **C** можна визначити за формулою (2.10)

$$P(C)=P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)==0{,}7+0{,}8-0{,}7\cdot 0{,}8=0{,}94.$$

Дану задачу можна розв'язати ще іншим способом.

Ціль буде уражена, якщо станеться одна з трьох несумісних подій: $A_1\cdot\overline{A_2}$ – в ціль попала перша гармата і не попала друга; $\overline{A_1}\cdot A_2$ – в ціль не попала перша гармата і попала друга; $A_1\cdot A_2$ – в ціль попали обидві гармати.

$$C=A_1\cdot\overline{A_2}+\overline{A_1}\cdot A_2+A_1\cdot A_2$$

У цьому випадку, застосовуючи *наслідок теореми 2.1* за формулою (2.11), отримаємо

$$P(C)=P(A_1\cdot\overline{A_2})+P(\overline{A_1}\cdot A_2)+P(A_1\cdot A_2)=P(A_1)\cdot P(\overline{A_2})+P(\overline{A_1})\cdot P(A_2)+P(A_1)\cdot P(A_2)=$$
$$=0{,}7\cdot(1-0{,}8)+(1-0{,}7)\cdot 0{,}8+0{,}7\cdot 0{,}8=0{,}94.$$

Самий простий спосіб розв'язання задачі полягає в поданні ймовірності події **C** через ймовірність протилежної події – промах обох гармат:

$$P(C)=1-P(\overline{C})=1-P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2})=1-P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})=1-(1-0{,}7)\cdot(1-0{,}8)=0{,}94.$$

У тому випадку, коли кількість подій перевершує два, вводиться поняття незалежних у сукупності подій.

Визначення 2.4. Події A_i ($i=\{1,\ 2,\dots,\ n\}$) називаються ***незалежними у сукупності***, якщо будь-яке з них не залежить від будь-якої лінійної комбінації (добутку) будь-якого числа других.

Для незалежними у сукупності події правило множення має вигляд

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n). \qquad (2.15)$$

Або
$$P\left(\prod_{i=1}^{n}A_i\right)=\prod_{i=1}^{n}P(A_i), \qquad (2.16)$$

тобто ймовірність добутку кількох незалежними у сукупності події дорівнює добутку ймовірностей цих подій.

Зауважимо, що з незалежності подій у сукупності випливає їх попарна незалежність, але не навпаки.

Наведемо наступну теорему.

Теорема 2.3. Ймовірність появи принаймні одної з подій ***n*** попарно незалежних подіі $A_1, A_2, ..., A_n$ дорівнює одиниці мінус добуток імовірностей непояви цих подій:

$$P(A) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\overline{A}_i), \tag{2.17}$$

де *P(A)* − ймовірність появи принаймні одної з подій ***n*** попарно незалежних подіі;
$P(\overline{A}_i)$ − ймовірність непояви подіі A_i (i={1, 2,…, n}).

Доведення. Якщо подія *A* полягає в появи принаймні одної з подій $A_1, A_2, ..., A_n$, то подіі *A* і $\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot ... \cdot \overline{A}_n$ протилежні, тому за формулою (2.5) сума їх ймовірностей дорівнює 1. Крім того, оскільки $A_1, A_2, ..., A_n$ попарно незалежні, то незалежні і подіі $\overline{A}_1, \overline{A}_2, ..., \overline{A}_n$.

Отже,

$$P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot ... \cdot \overline{A}_n) = P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot ... \cdot P(\overline{A}_n) = \prod_{i=1}^{n} P(\overline{A}_i).$$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot ... \cdot \overline{A}_n) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\overline{A}_i).$$

Таким чином, теорему доведено.

Наслідок теореми 2.3. Розглядаються ***n*** попарно незалежних подіі $A_1, A_2, ..., A_n$, кожна з котрих може відбутися з ймовірністю ***p.*** Тоді ймовірність появи принаймні одної з подій $A_1, A_2, ..., A_n$ дорівнює

$$P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_n = 1 - (q_i)^n, \tag{2.18}$$

де q_i − ймовірність появи подіі $\overline{A}_i$, протилежної до подіі A_i (i={1, 2,…, n}).

Задача 2.4. Скільки потрібно зробити підкидань монети, щоб з імовірністю не меншою 0,9 випав принаймні один герб?

Розв'язання. Ймовірність випадання герба при одному підкиданні монети дорівнює 0,5, відповідно ймовірність протилежної подіі випадання цифри − 0,5. Тоді ймовірність випадання принаймні одного герба при ***n*** підкиданнях дорівнює $(1 - 0{,}5^n)$. З розв'язку нерівності

$1 - 0{,}5^n > 0{,}9$ випливає , що

$$0{,}5^n < 0{,}1;$$
$$n \cdot \log_{0,5} 0{,}5 > \log_{0,5} 0{,}1;$$
$$n > \log_2 10;$$
$$n \geq 4.$$

2.4. Моделі надійності технічних систем

2.4.1. Надійність технічних систем

Теорія ймовірностей відіграє першорядну роль у теорії надійності, надаючи їй зручний математичний апарат. Зокрема, розрахунок *надійності технічних систем* цілком базується на основних теоремах теорії ймовірностей і є вдалою ілюстрацією їх використання в інженерній практиці.

Визначення 2.5. Під ***надійністю технічної системи*** розуміється ймовірність її безвідмовної роботи за певний період часу **T.**

Основні теореми теорії ймовірностей дозволяють визначати ймовірність безвідмовної роботи системи за відомими ймовірностями безвідмовної роботи окремих її елементів.

Елементи системи можуть різним способом об'єднуватися в систему. В залежності від способу об'єднання елементів розрізняють системи з

1. *послідовним*;
2. *паралельним*;
3. *змішаним* з'єднанням елементів.

2.4.2. Послідовне з'єднання елементів

Визначення 2.6. ***Послідовним з'єднанням*** елементів називається таке з'єднання елементів, при якому входом кожного наступного елементу є вихід попереднього (рис. 2.6).

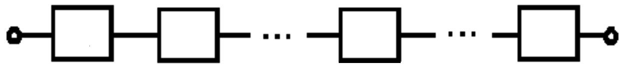
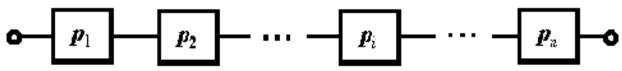


Рис. 2.6

Будемо вважати, що система розбита на елементи так, що відмова будь-якого з них ні в якому разі не впливає на відмову інших елементів.

Для безвідмовної роботи системи, безумовно необхідна безвідмовна робота всіх елементів системи, відмовлення системи настає тоді, коли відмовляє хоча б один елемент системи.

Приклад 2.6. Розглянемо систему з послідовним з'єднанням ***n*** елементів. Кожному ***i***-му елементу поставлена у відповідність ймовірність його безвідмовної роботи $\boldsymbol{p_i}$.



Позначимо події:

C – система працездатна за деякий період часу Т;

$\boldsymbol{A_1}$ – працездатний 1-ий елемент системи протягом часу Т;

$\boldsymbol{A_2}$ – працездатний 2-ий елемент протягом часу Т;

$\boldsymbol{A_i}$ – працездатний *i*-ий елемент системи протягом часу Т.

Ймовірність події A_i дорівнює $P(A_i) = p_i$.

Вся система працездатна тільки тоді, коли працездатні всі її елементи, тобто

$$C = A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_i \cdot \ldots \cdot A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i \ .$$

Оскільки всі події A_i між собою незалежні, то ймовірність події ***C*** визначиться відповідно до *наслідком теореми 2.2* за формулою (2.14)

$$P(C) = \prod_{i=1}^{n} p_i \ . \qquad (2.19)$$

Вираз (2.19) є **математичною моделлю надійності системи послідовно з'єднаних елементів.**

Аналіз моделі показує, що при $n \to \infty$, ймовірність безвідмовної роботи системи $P(A) \to 0$, оскільки всі співмножники $p_i < 1$. Це значить – чим складніше система, тим нижче її надійність. Занадто складна система непрацездатна!

2.4.3. Паралельне з'єднання елементів

Визначення 2.7. ***Паралельним з'єднанням*** елементів називається таке з'єднання елементів при якому всі елементи мають загальний вхід і загальний вихід.

Відмова системи з паралельним з'єднанням елементів наступає тоді, коли відмовляють одночасно всі елементи. Система вважається працездатної, якщо працездатний принаймні один з елементів системи.

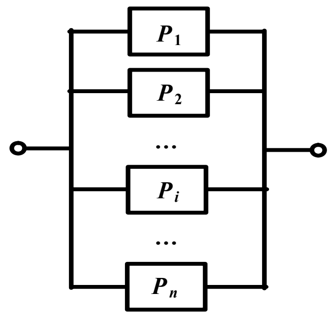


Рис. 2.7

Приклад 2.7. Розглянемо систему з паралельним з'єднанням n елементів (рис. 2.7).

Позначимо події:

C – система працездатна за деякий період часу T; $\overline{C}$ – система відмовила;

A_i – безвідмовна робота i-го елемента системи; $\overline{A_i}$ – відмова i-го елемента.

Вся система буде непрацездатна тільки тоді, коли будуть непрацездатні всі її елементи, тобто

$$\overline{C} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \ldots \cdot \overline{A_i} \cdot \ldots \cdot \overline{A_n} = \prod_{i=1}^{n} \overline{A_i} .$$

Оскільки всі події $\overline{A_i}$ між собою незалежні, то ймовірність події $\overline{C}$ визначиться за формулою (2.16)

$$P(\overline{C}) = \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i) .$$

Шукану ймовірність працездатності системи знайдемо за формулою

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i) . \qquad (2.20)$$

Вираз (2.20) є **математичною моделлю надійності системи паралельно з'єднаних елементів.**

Аналіз моделі показує, що при $n \to \infty$, ймовірність безвідмовної роботи системи $P(A) \to 1$, оскільки добуток $\prod_{i=1}^{n} \left(1 - p_i\right) \to 0$.

Таким чином, введення в систему додаткових паралельних гілок сприяє підвищенню надійності системи.

Так, для досягнення належної надійності функціонування інженерних мереж часто удаються до їх розпаралелювання, а для підвищення надійності роботи приладів – до дублювання (і навіть потроюванню) основних його вузлів.

2.4.4. Змішане з'єднання елементів

Реальні технічні системи, як правило, являють собою складні комбінації послідовних і паралельних з'єднань.

Приклад 2.8. Розглянемо систему зі змішаним з'єднанням 6 елементів. Кожному ***i***-му елементу поставлена у відповідність ймовірність його безвідмовної роботи $\boldsymbol{p_i}$ (рис. 2.8) .

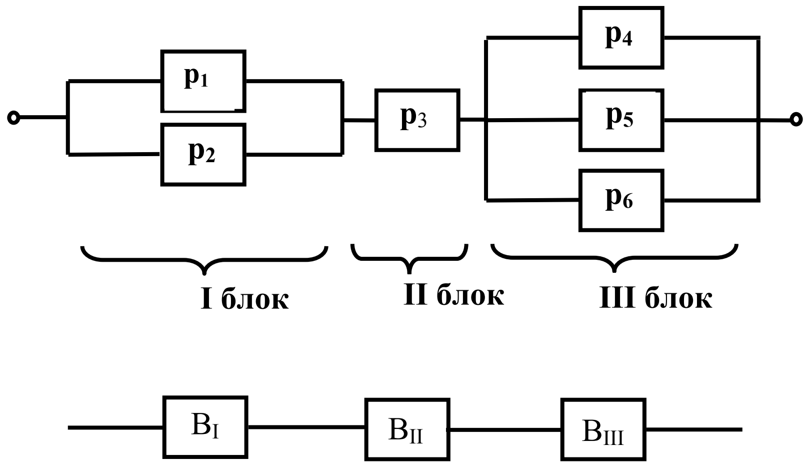


Рис. 2.8

Позначимо події:

C – система працездатна за деякий період часу Т;

$\overline{C}$ – система відмовила;

$\boldsymbol{A_i}$ – безвідмовна робота *i*-го елемента системи;

$\overline{A}_i$ – відмова *i*-го елемента.

$\boldsymbol{B_i}$ – безвідмовна робота *i*-го блока системи;

$$\overline{B}_I = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2, \qquad P(\overline{B}_I) = \prod_{i=1}^{2}(1-p_i), \quad P(B_I) = 1 - P(\overline{B}_I) = 1 - \prod_{i=1}^{2}(1-p_i),$$

$$B_{II} = A_3 , \qquad P(B_{II}) = p_3 ,$$

$$\overline{B}_{III} = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3 , \qquad P(B_{III}) = 1 - P(\overline{B}_{III}) = 1 - \prod_{i=4}^{6}(1-p_i),$$

$$C = B_I \cdot B_{II} \cdot B_{III}, \qquad P(C) = P(B_I \cdot B_{II} \cdot B_{III}) = (1 - \prod_{i=1}^{2}(1-p_i)) \cdot p_3 \cdot (1 - \prod_{i=4}^{6}(1-p_i)).$$

2.5. Контрольні запитання

1. Аксіоми ймовірності та її властивості.
2. Які події називаються протилежними?
3. Чому дорівнює сума ймовірностей протилежних подій?
4. Дати визначення поняття геометричної ймовірності.
5. Задача про зустріч.
6. Задача Бюффона.
7. Які теореми теорії ймовірностей називають основними?
8. Теорема додавання ймовірностей.
9. Наслідок основної теореми про ймовірність суми двох подій?
10. Які події називаються незалежними?
11. Дати визначення умовної ймовірності.
12. Як позначається умовна ймовірність?
13. Теорема множення ймовірностей.
14. Наслідок основної теореми про ймовірність добутку двох подій?
15. Які події називаються незалежними у сукупності?
16. Чому дорівнює ймовірність появи принаймні одної з подій n попарно незалежних події?
17. Що розуміють під надійністю технічної системи?
18. Як підрозділяються технічні системи в залежності від способу з'єднання їх елементів?
19. Математична модель надійності системи послідовно з'єднаних елементів.
20. Математична модель надійності системи паралельно з'єднаних елементів.

3. ЗАСТОСУВАННЯ ОСНОВНИХ ТЕОРЕМ

3.1. Алгебра гіпотез

3.1.1. Формула повної ймовірності

Наслідком обох основних правил теорії ймовірностей – правила додавання і правила множення – є формула повної ймовірності.

Формула ***повної ймовірності*** використовується для визначення ймовірності події $\boldsymbol{A}$, що може відбутися тільки з одною з повної групи несумісних подій $\boldsymbol{H_i}$, $i = \{1, 2, \dots , n\}$, тобто

$$H_i \cdot H_j = \varnothing, \quad \forall i \neq j; \qquad \sum_{i=1}^{n} H_i = \Omega .$$

Події $\boldsymbol{H_i}$., що задовольняють вказаним умовам називаються ***гіпотезами.*** При цьому відомі ***апріорні*** (“перед дослідом”) ймовірності подій H_i та умовні ймовірності настання події A за умови, що відбулася та або інша подія H_i.

Теорема 3.1. Якщо деяка подія $\boldsymbol{A}$ може відбутися тільки з однією з повної групи несумісних подій (гіпотез) H_i ($i = \{1, 2, \dots , n\}$) і відомі апріорні ймовірності $P(H_i)$ кожної гіпотези й умовні ймовірності $P(A/H_i)$ події A за умови, що здійснилася та або інша гіпотеза, то ***повна***, ймовірність події A визначається за формулою

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A/H_i). \tag{3.1}$$

Формула (3.1) називається ***формулою повної ймовірності.***

Доведення. За умовами експерименту подія A може відбутися разом з однією з події $H_1, H_2, \dots , H_n$, таким чином складна подія A може бути розкладена в такий спосіб (рис.3.1):

$$A = H_1 \cdot A + H_2 \cdot A + \dots + H_n \cdot A .$$

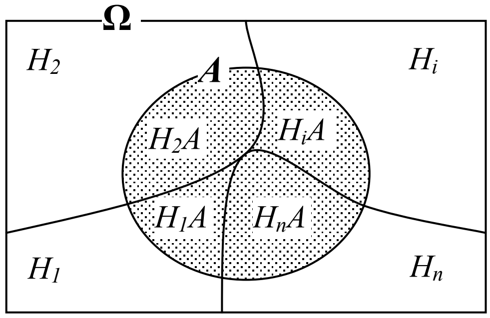


Рис. 3.1

Так як події $H_1, H_2, \ldots, H_n$ несумісні, то і події $H_i \cdot A$ ($i = \{1, 2, \ldots, n\}$) також несумісні, бо:

$$\textit{Якщо} \quad H_i \cdot H_j = \varnothing, \quad \forall i \neq j; \quad \textit{то}$$

$$(H_1 \cdot A) \cdot (H_2 \cdot A) \cdot \ldots (H_n \cdot A) = (H_1 \cdot H_2 \cdot \ldots \cdot H_n) \cdot (A \cdot A \cdot \ldots \cdot A) = \varnothing \cdot A = \varnothing$$

Ймовірність події A визначається у відповідності з ***наслідком теореми 2.1***, тобто

$$P(A) = P(H_1 A) + P(H_2 A) + \ldots + P(H_n A).$$

Застосовуючи до кожного доданка останнього виразу **теорему 2.2**, одержимо

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + \ldots + P(H_n)P(A/H_n) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i),$$

що і потрібно було довести.

Задача 3.1. Завод випускає прилади з гарантійним терміном експлуатації один рік. Відомо, що 20% продукції буде експлуатуватися в місцевості, що знаходиться за полярним колом, 75% – у місцевості з помірним кліматом, 5% – у пустелі. Відомі також імовірності безвідмовної роботи приладів у кожному регіоні протягом гарантійного терміну: 0,9 – за полярним колом; 0,99 – у місцевості з помірним кліматом; 0,8 – у пустелі.

Необхідно визначити який відсоток приладів треба випустити додатково до плану для заміни виробів, що вийдуть з ладу в період гарантійного терміну. При цьому вважається, що при заміні виробів останні не відмовляють.

Розв'язання. Додатково до плану слід випустити стільки виробів, скільки їх відмовить у всіх регіонах. Шуканий додатковий відсоток виробів – це повна ймовірність відмови приладів по всіх регіонах, помножена на 100%.

Введемо позначення:

подія A **–** безвідмовна робота приладу;

гіпотеза H_1 – прибор експлуатуватиметься за полярним колом**;**

гіпотеза H_2 – прилад експлуатуватиметься в місцевості з помірним кліматом;

гіпотеза H_3 **–** прилад експлуатуватиметься в пустелі.

Тоді ймовірності здійснення гіпотез, виходячи з умови задачі, складуть:

$$P(H_1) = \frac{20\%}{100\%} = 0{,}2; \qquad P(H_2) = \frac{75\%}{100\%} = 0{,}75; \qquad P(H_3) = \frac{5\%}{100\%} = 0{,}05.$$

$$\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = 0{,}2 + 0{,}75 + 0{,}05 = 1.$$

Відповідні умовні ймовірності події A набудуть значень:

$$P(A/H_1) = 0{,}9; \quad P(A/H_2) = 0{,}99; \quad P(A/H_3) = 0{,}8.$$

Визначимо повну ймовірність безвідмовної роботи приладу:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i)P(A/H_i) = 0{,}2\cdot0{,}9 + 0{,}75\cdot0{,}99 + 0{,}05\cdot0{,}8 = 0{,}9625.$$

Повна ймовірність відмови приладів по всіх регіонах визначиться як

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}9625 = 0{,}0375.$$

Шукана величина − відсоток приладів, що треба випустити додатково до плану для заміни виробів:

$$P(\overline{A}) \cdot 100\% = 3{,}75\%.$$

Задача 3.2. Є 15 екзаменаційних білетів, кожний з яких має по два питання. Студент знає відповіді на 25 запитань. Знайти ймовірність того, що екзамен буде зданий, якщо для цього досить відповісти на обидва запитання свого білета або на одне запитання з свого білета і на одне (за вибором викладача) запитання з додаткового білета.

Розв'язання. Введемо позначення:

H_1 – студент знає обидва запитання свого білета;

H_2 – студент з двох запитань свого білета знає один.

$$P(H_1) = \frac{25}{30}\cdot\frac{24}{29};$$

$$P(H_2) = \frac{25}{30}\cdot\frac{5}{29} + \frac{5}{30}\cdot\frac{25}{29} = \frac{250}{870} = \frac{25}{87};$$

Умовні ймовірності події A:

$$P(A/H_1) = 1, \qquad P(A/H_2) = \frac{24}{28}.$$

Повна ймовірність − екзамен буде зданий:

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)=\frac{25}{30}\cdot\frac{24}{29}\cdot 1+\frac{25}{87}\cdot\frac{24}{28}=\frac{190}{203}\ .$$

3.1.2. Формула Байєса

Наслідком теореми множення і формули повної ймовірності є теорема гіпотез або формула Байєса.

Формула Байєса використовується в тих же умовах, що і формула повної ймовірності і дозволяє визначати ***апостеріорні*** (“після досліду”) ймовірності гіпотез $P(Hj/A)$, $j=1, 2, \ldots , n$, тобто умовні ймовірності гіпотез за умови, що подія A ***відбулася.***

Теорема 3.2. Якщо деяка подія $\boldsymbol{A}$ може відбутися тільки з одною з повної групи несумісних подій (гіпотез) H_i ($i = \{1, 2, \ldots , n\}$) і відомі апріорні ймовірності гіпотез $P(H_i)$, умовні ймовірності $P(A/H_i)$ події A за умови, що здійснилася та або інша гіпотеза, а також відомо, що подія ***A відбулася***, то ***апостеріорна*** ймовірність гіпотези H_i ($i\in\{1, 2, \ldots , n\}$) визначається за формулою

$$P\left(H_i / A\right)=\frac{P\left(H_i\right)P\left(A / H_i\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P\left(H_i\right)P\left(A / H_i\right)}\ . \qquad (3.2)$$

Формула (3.2) називається ***теоремою гіпотез*** або ***формулою Байєса*** (за прізвищем англійського математика Байєса, якій вивів її у 1764 р.).

Доведення. На підставі **теореми 2.2** про ймовірність добутку двох подій визначимо ймовірність одночасної появи подій A і H_i ($i\in\{1,2,\ldots,n\}$) в одному експерименті:

$$P(A\cdot H_i) = P(A)\cdot P(H_i /A) = P(H_i)\cdot P(A/H_i)$$

Другу частину отриманого співвідношення, тобто рівність

$$P(A)\cdot P(H_i /A) = P(H_i)\cdot P(A/H_i)$$

розв’яжемо відносно величини $P(H_i /A)$:

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A / H_i)}{P(A)} \quad . \tag{3.3}$$

Ймовірність події $A - P(A)$ знайдемо за формулою повної ймовірності (3.1)

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A / H_i). \tag{3.4}$$

Підставляючи (3.4) в (3.3), остаточно одержимо

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A / H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A / H_i)} \quad .$$

Теорему доведено.

Формула Байєса корисна тим, що дозволяють коректувати відомості про випадкові події на основі інформації, що надійшла. Вона знаходить застосування скрізь, де використовують імовірнісні методи:

– розпізнаванні образів для виявлення об'єктів по їх зображенню;
– у радіолокаційній техніці для відділення сигналу від шуму;
– технічній діагностиці для пошуку несправності;
– у медичній діагностиці для постановки діагнозу;
– у прогнозування погоди і в інших випадках, коли необхідно виявити ймовірну причину (гіпотезу) появи події.

Задача 3.2. На завод-виготовлювач надійшла рекламація на прилад, що відмовив (за умовами задачі 3.1.). Необхідно визначити найімовірніший регіон, в якому він експлуатувався.

Розв'язання. За умовами задачі подією, що відбулася, є відмова приладу – $\overline{A}$. Повна ймовірність цієї події

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}9625 = 0{,}0375 \ .$$

Ймовірності здійснення гіпотез дорівнюють:

$$P(H_1) = 0{,}2 \ ; \qquad P(H_2) = 0{,}75; \qquad P(H_3) = 0{,}05.$$

Умовні ймовірності події $\overline{A}$ за умови, що відбулася та або інша гіпотеза, визначаються в такий спосіб:

$P(\overline{A}/H_1) = 1 - P(A/H_1) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1;$

$P(\overline{A}/H_2) = 1 - P(A/H_2) = 1 - 0{,}99 = 0{,}01;$

$P(\overline{A}/H_3) = 1 - P(A/H_3) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2.$

Знайдемо *апостеріорні* ймовірності гіпотез про регіон експлуатації приладу, що відмовив, за формулою Байєса:

$$P\left(H_1/\overline{A}\right) = \frac{P(H_1)P\left(\overline{A}/H_1\right)}{P\left(\overline{A}\right)} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}1}{0{,}0375} = 0{,}533\,;$$

$$P\left(H_2/\overline{A}\right) = \frac{P(H_2)P\left(\overline{A}/H_2\right)}{P(\overline{A})} = \frac{0{,}75 \cdot 0{,}01}{0{,}0375} = 0{,}2\,;$$

$$P\left(H_3/\overline{A}\right) = \frac{P(H_3)P\left(\overline{A}/H_3\right)}{P(\overline{A})} = \frac{0{,}05 \cdot 0{,}2}{0{,}0375} = 0{,}2667\ .$$

Таким чином, найбільш імовірним регіоном, з якого надійшла рекламація, є місцевість за полярним колом. Дана гіпотеза має найбільшу апостеріорну ймовірність – 0,5333.

3.2. Повторення експерименту

3.2.1. Задачі на повторення незалежних експериментів

Багато прикладних задач (наприклад, контроль якості продукції) пов'язана з обчисленням імовірності складних подій при фіксованому числі $\boldsymbol{n}$ повторення *незалежних експериментів* і відомої ймовірності $\boldsymbol{p}$ настання деякої події A в одному експерименті.

При цьому кожна з елементарних подій серії представляється у вигляді добутку співмножників, кожен з яких залежно від порядку слідування дорівнює або A_i, або $\overline{A}_i$.

Визначення 3.1. Експерименти називаються ***незалежними***, якщо ймовірність появи події A в кожному експерименті не залежить від того, з'явилася вона в попередніх експериментах чи ні.

Задача 3.3. Розглянемо три незалежних досліди в кожному з яких подія A відбувається з однаковою вірогідність $\boldsymbol{p}$. Визначити вірогідність того, що в серії з 3 дослідів подія A станеться рівно 2 рази.

Або інакше:

Ймовірність здобуття студентом стипендії дорівнює $\boldsymbol{p} = 0{,}8$. Визначити ймовірність, що в студент отримуватиме стипендію в двох з трьох семестрах, що залишилися.

Розв'язання. Введемо позначення:

складна подія A – студент отримує стипендію в 2-х з 3-х семестрах;

A_i – студент отримує стипендію в i-ом семестрі;

$\overline{A_i}$ – студент не отримує стипендію в i-ом семестрі.

$$P(A_i) = \boldsymbol{p} = 0{,}8\ , \quad P(\overline{A_i}) = 1 - \boldsymbol{p} = 0{,}2\ .$$

$$\boldsymbol{A} = A_1A_2\overline{A_3} + A_1\overline{A_2}A_3 + \overline{A_1}A_2A_3\ .$$

Згідно ***наслідку теореми 2.1*** (несумісні події)

$$P(A) = P(A_1A_2\overline{A_3} + A_1\overline{A_2}A_3 + \overline{A_1}A_2A_3) = P(A_1A_2\overline{A_3}) + P(A_1\overline{A_2}A_3) + P(\overline{A_1}A_2A_3)\ .$$

Згідно ***наслідку теореми 2.2*** (A_i – події незалежні, $i = 1,2,3$), тобто

$$P(A) = P(A_1)P(A_2)P(\overline{A_3}) + P(A_1)P(\overline{A_2})P(A_3) + P(\overline{A_1})P(A_2)P(A_3) =$$

$$= p\cdot p\cdot(1-p) + p\cdot(1-p)\cdot p + (1-p)\cdot p\cdot p = 3\cdot p^2\cdot(1-p) = C_3^2\cdot p^2\cdot(1-p).$$

$$P(A) = C_3^2\cdot p^2\cdot(1-p) = 3\cdot 0{,}64\cdot 0{,}2 = 0{,}384.$$

Таким чином, завдання на повторення незалежних дослідів можуть бути вирішені за допомогою основних теорем теорії вірогідності. Проте в умовах великого числа випробувань використання основних теорем стає малоефективним із-за великих тимчасових витрат на обчислювальні процедури.

3.2.2. Формула Бернуллі

Процедура повного перебору виправдовує себе лише при невеликому числі випробувань, у разі ж великого числа випробувань, набагато ефективніше використовувати формулу Бернуллі.

Розглянемо серію з ***n*** випробувань, у кожному з яких подія A з’являється з ***однією й тією*** самою ймовірністю ***p*** , при цьому результат кожного випробування ***не залежить*** від результату інших. При кожному випробуванні розрізняються ***два*** результати − поява події A і поява протилежної події $\overline{A}$.

Подібна постановка задачі має назву ***схема повторних випробувань, схема біноміального експерименту*** або ***схема Бернуллі***.

Теорема 3.3. Якщо робиться ***n*** незалежних випробувань, у кожному з яких подія A з'являється з ***однаковою*** ймовірністю ***p*,** то ймовірність того, що в цих випробуваннях подія A відбудеться рівно ***k*** разів (байдуже, у якій послідовності) визначається за формулою

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k}. \tag{3.5}$$

Формула (3.5) називається ***формулою Бернуллі*.**

Доведення. Позначимо через B подію, яка полягає у тому, що в серії з ***n*** випробувань подія A з'явилась в ***k*** випробуваннях , а подія $\overline{A}$ в інших ***n-k*** випробуваннях.

Подія B є сумою рівноможливих несумісних подій:

$$B = \underbrace{A_1 \cdot \ldots \cdot A_k}_{k} \cdot \underbrace{\overline{A}_{k+1} \cdot \ldots \cdot \overline{A}_n}_{n-k} + \ldots + \underbrace{A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-k}}_{n-k} \cdot \underbrace{\overline{A}_{n-k+1} \cdot \ldots \cdot \overline{A}_n}_{k} \quad ,$$

де A_i і $\overline{A}_i$ − поява й не поява події A в i-ому випробуванні.

Визначимо ймовірність одного з доданків

$$P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_k \cdot \overline{A}_{k+1} \cdot \ldots \cdot \overline{A}_n) = \underbrace{p \cdot p \cdot \ldots \cdot p}_{k} \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot \ldots \cdot q}_{n-k} = p^k \cdot q^{n-k} .$$

Оскільки всі випробування однакові, то імовірності всіх доданків рівні.

Кількість варіантів таких складних подій (доданків) дорівнює числу вибірок k номерів дослідів з n можливих, тобто дорівнює числу сполучень C_n^k. Оскільки ці події несумісні, то ймовірність їх суми дорівнює сумі їх імовірностей:

$$P(B) = P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Що і потрібно було довести.

Формулу Бернуллі рекомендується використовувати при числі випробувань, що не перевищує числа 10.

Задача 3.4. В умовах задачі 3.3. визначимо ймовірність того, що в серії з 3 випробувань подія A станеться рівно 2 рази, використовуючи теорему Бернуллі.

Розв'язання. Позначимо події:

A – студент отримує стипендію в 2-х з 3-х семестрах;

A_i – студент отримує стипендію в i-ому семестрі, $P(A_i) = \boldsymbol{p} = 0{,}8$;

$\overline{A}_i$ – студент не отримує стипендію в i-ому семестрі. $P(\overline{A}_i) = 1 - \boldsymbol{p} = 0{,}2$.

$$P(A) = P_3(2) = C_3^2 p^2 (1-p)^{3-2} = 3 \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2 = 0{,}384.$$

Задача 3.5. Ймовірність появи студента на лекції дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що студент відвідає 7 лекцій з 15 запланованих в семестрі.

Розв'язання. Позначимо події:

A – студент відвідає 7 лекцій з 15 запланованих;

A_i – студент відвідує i - тую лекцію, $P(A_i) = \boldsymbol{p} = 0{,}9$;

$P(\overline{A}_i) = 1 - p = \boldsymbol{q} = 0{,}1$;

$\boldsymbol{n} = 15$, $\boldsymbol{k} = 7$.

$$P(A) = P_{15}(7) = C_{15}^7 p^7 q^{15-7} = \frac{15!}{8! \cdot 7!} \cdot 0{,}9^7 \cdot 0{,}1^8 \approx 3{,}07 \cdot 10^{-5} = 0{,}0000307.$$

Використання формули Бернуллі при великих значеннях $\boldsymbol{n} >> 1$ і $\boldsymbol{k}$, а також при малих значеннях $\boldsymbol{p}$ і $(1- \boldsymbol{p})$ наводить до громіздких обчислень.

Приклад 3.1. Ймовірність появи браку при виробництві на деякому підприємстві дорівнює 0,02. Чому дорівнює ймовірність того, що 1000 навмання взятих виробів виявиться рівно 30 бракованих?

Отже , потрібно обчислити

$$P(A) = P_{1000}(30) = C_{1000}^{30} p^{30} q^{1000-30} = \frac{1000!}{30!\cdot 970!} \cdot 0{,}02^{30} \cdot 0{,}98^{970}.$$

Зазначених обчислень можна уникнути, якщо точне визначення ймовірності $P_n(k)$ замінити її оцінкою.

3.2.3. Локальна теорема Лапласа

Якщо кількість незалежних випробувань досить *велика*, замість формули Бернуллі треба користуватися *локальною* і *інтегральною теоремами Лапласа*, які дають приблизний результат, але він тим ближче до результату точної формули Бернуллі, чим більше кількість випробувань.

Асимптотична формула, яка дозволяє приблизно оцінити ймовірність появи події A в $\boldsymbol{n}$ випробуваннях рівно $\boldsymbol{k}$ раз для окремого випадку $\boldsymbol{p} = 0{,}5$ була отримана Муавром в 1730 р., а в 1783 р. Лаплас узагальнив формулу для довільного $p \in (0;1)$.

Теорема 3.4 (*локальна теорема Лапласа*). Якщо робиться $\boldsymbol{n}$ незалежних випробувань, у кожному з який подія A з'являється з однаковою ймовірністю $\boldsymbol{p}$ $(0 < p < 1)$, то ймовірність того, що в цих випробуваннях подія A відбудеться рівно $\boldsymbol{k}$ разів (байдуже, у якій послідовності) може бути оцінена (тим точніше, чим більше n) за формулою

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} \varphi(x), \tag{3.6}$$

де $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ – функція Гауса;

$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$; $q = 1 - p$.

Функція Гауса затабульована (*див. Додатки Таблиця 1*).

Це дозволяє уникнути складних обчислень за формулою (3.6), замінюючи їх простим обчисленням аргументу функції x.

Користуючись таблицями значень функції $\varphi(x)$, необхідно мати на увазі властивості цієї функції.

Властивості функції Гауса $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$:

1. Функція Гауса – парна функція, тобто $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Тому таблиця складена тільки для позитивних значень аргументу.

2. При $|x| > 4$ $\varphi(x) = 0$.

Тому таблиця значень складена тільки для аргументу $0 \le x \le 4$

Задача 3.6. В умовах завдання 3.5. знайти ймовірність того, що студент відвідає 7 лекцій з 15 запланованих в семестрі.

Розв'язання. За умовами задачі маємо

$\boldsymbol{n} = 15$, $\boldsymbol{k} = 7$, $\boldsymbol{p} = 0{,}9$, $\boldsymbol{q} = 1 - p = 0{,}1$;

$$P(A) = P_{15}(7) \approx \frac{1}{\sqrt{15 \cdot 0{,}9 \cdot (1 - 0{,}9)}} \varphi(x),$$

де $x = \frac{7 - 15 \cdot 0{,}9}{\sqrt{15 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}} = \frac{-6{,}5}{\sqrt{1{,}35}} = \frac{-6{,}5}{1{,}16} = -5{,}6$.

$$\varphi(x) = \varphi(-5{,}6) = \varphi(5{,}6) = 0 .$$

$$P(A) = P_{15}(7) \approx \frac{1}{1{,}16} \cdot 0 = 0.$$

Формулу Лапласа рекомендується використовувати, якщо $npq > 9$.

Задача 3.7. В умовах прикладу 3.1**.** Знайдемо чому дорівнює ймовірність того, що 1000 навмання взятих виробів виявиться рівно 30 бракованих.

Розв'язання. За умовами задачі маємо

$\boldsymbol{n} = 1000$, $\boldsymbol{k} = 30$, $\boldsymbol{p} = 0{,}02$, $\boldsymbol{q} = 1 - p = 0{,}98$;

$$P(A) = P_{1000}(30) \approx \frac{1}{\sqrt{1000 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}98}} \varphi(x),$$

де $x = \frac{30 - 1000 \cdot 0{,}02}{\sqrt{1000 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}98}} = \frac{10}{4{,}4272} = 2{,}26$. ($npq = 1000 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}98 = 19{,}6 > 9$)

$$\varphi(x) = \varphi(2{,}26) = 0{,}0310 \ .$$

$$P(A) = P_{1000}(30) \approx \frac{1}{4{,}4272} \cdot 0{,}0310 = 0{,}0070021 \ .$$

3.2.4. Формула Пуассона

Якщо ймовірність ***p*** появи події *A* в окремому випробуванні близька до нуля, то навіть при великих ***n*** значення ймовірності, обчислюване за локальною теоремою Лапласа, виявляється недостатньо точним. В таких випадках використовують формулу, одержану Пуассоном.

Теорема 3.5 (*теорема Пуассона*). Якщо ймовірність ***p*** настання події *A* в кожному випробуванні постійна, але ***мала***, число незалежних випробувань ***n*** достатньо велике, а $\lambda = np < 10$, то ймовірність того, що в *n* випробуваннях подія *A* наступить рівно ***k*** разів приблизно рівна

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \ , \tag{3.7}$$

де $\lambda = np$.

Для формули Пуассона наведені таблиці значень функції $P_n(k)$ (*див. Додаток Таблиця 3*).

Задача 3.8. Ймовірність виготовлення нестандартної деталі рівна 0,004. Знайти ймовірність того, що серед 1000 деталей виявиться 5 нестандартних.

Розв'язання. За умовами задачі маємо:

$$\boldsymbol{n}=1000, \quad \boldsymbol{p}=0{,}004, \quad \boldsymbol{k}=5,$$

тобто виконані вимоги **теореми Пуассона** $\lambda = np = 1000 \cdot 0{,}004 = 4 < 10$.

За таблицею функції Пуассона (див. Додаток Таб.3) при, $k = 5$ одержімо:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} = P_{1000}(5) \approx 0{,}1563 \ .$$

Знайдемо ймовірність тієї ж події за локальною **теоремою Лапласа**.

Маємо $\boldsymbol{n}=1000, \quad \boldsymbol{p}=0{,}004, \quad \boldsymbol{k}=5,$

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{5 - 1000 \cdot 0{,}004}{\sqrt{1000 \cdot 0{,}004 \cdot 0{,}996}} = \frac{1}{1{,}996} = 0{,}501,$$

$$\varphi(0{,}501) = 0{,}3519 \ .$$

Шукана ймовірність: $P_{1000}(5) = \dfrac{\varphi(0{,}501)}{1{,}996} = \dfrac{0{,}3519}{1{,}9966} \approx 0{,}1763$.

Точне значення надає **формула Бернуллі**:

$$P_{1000}(5) = C_{1000}^{5} \cdot 0{,}004^{5} \cdot 0{,}996^{995} \approx 0{,}1552 \ .$$

Таким чином, у даному випадку формула Пуассона дає набагато більш точне наближення, ніж формула Лапласа.

3.2.5. . Інтегральна теорема Лапласа

Теорема 3.6 (*інтегральна теорема Лапласа).* Якщо робиться ***n*** незалежних випробувань, у кожному з який подія *A* з'являється з однаковою ймовірністю ***p*,** то ймовірність того, що в цих випробуваннях подія *A* відбудеться не менше $\boldsymbol{k_1}$ разів і не більш $\boldsymbol{k_2}$ разів (байдуже, в якій послідовності) може бути оцінена (тим точніше, чим більше *n*) за формулою

$$P_n(k_1, k_2) \approx \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)dx = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \qquad (3.8)$$

де $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$; $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$; $q = 1 - p$;

$\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функція Лапласа.

Функція Лапласа затабульована (*див. Додаток Таблиця 2*).

Це дозволяє уникнути інтегрування функції Гауса за формулою (3.6), заміннюючи його обчисленням тільки аргументів функції x_1 і x_2.

Користуючись таблицями значень функції *Φ(x),* необхідно мати на увазі властивості цієї функції.

Властивості функції Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$:

1. Функція Лапласа – непарна функція, тобто $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Тому таблиця складена тільки для позитивних значень аргументу.

2. При $|x| > 5$ $\Phi(x)=0,5$.

Тому таблиця значень складена тільки для аргументу $0 \le x \le 5$

Задача 3.9. Ймовірність відвідування студентом будь-якої лекції з курсу "Теорія ймовірностей" дорівнює 0,9. Визначити ймовірність відвідування студентом **не менше 7 лекцій з 15** запланованих у семестрі.

Розв'язання. За умовами задачі маємо :

$$\boldsymbol{n}=15,\ \ \boldsymbol{p}=0{,}9,\ \ \boldsymbol{k_1}=7,\ \ \boldsymbol{k_2}=15.$$

$$P(A)=P_{16}(7{,}15)\approx\Phi(x_2)-\Phi(x_1),$$

де $$x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{7-15\cdot0{,}9}{\sqrt{15\cdot0{,}9\cdot0{,}1}}=\frac{-6{,}5}{1{,}16}=-5{,}6\ ;$$

$$x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}=\frac{15-15\cdot0{,}9}{\sqrt{15\cdot0{,}9\cdot0{,}1}}=\frac{1{,}5}{1{,}16}=1{,}29\ ;$$

$$P(A)=P_{16}(7{,}15)\approx\Phi(x_2)-\Phi(x_1)=\Phi(1{,}29)-\Phi(-5{,}6)=\Phi(1{,}29)+\Phi(5{,}6)=$$
$$=0{,}4015+0{,}5=0{,}9015\ .$$

3.2.6. . Найімовірніше число здійснення подій

При розв'язанні задач, пов'язаних з формулами Бернуллі і Лапласа, часто використовують поняття *найімовірніше число здійснення подій.*

Нехай робиться $\boldsymbol{n}$ незалежних експериментів, у кожному з яких може наступити подія A з однаковою ймовірністю $\boldsymbol{p}$. За допомогою формули Бернуллі при невеликих n можна визначити, або за допомогою локальної теореми Лапласа при великих n можна оцінити ймовірність появи події A в n незалежних експериментах рівно k разів (k=0, 1, … n).

Знайдені значення $P_n(k)$ можуть бути наведені у вигляду таблиці

k	0	1	...	k_0	...	n
$P_n(k)$	$P_n(0)$	$P_n(1)$	...	$P_n(k_0)$	...	$P_n(k)$

Серед множини чисел $k,\ k\in\{0,n\}$, є, принаймні, одне число k_0, якому відповідає максимальна ймовірність $P_n(k)$.

Визначення 3.2. ***Найімовірнішим числом здійснення події*** A в $\boldsymbol{n}$ незалежних експериментах при однаковій імовірності $\boldsymbol{p}$ настання події A в кожному з них називається число $\boldsymbol{k_0}$**,** якому відповідає максимальна ймовірність $P_n(k)$ тобто число $k_0 = \arg\left(\max_{k=\overline{1,n}}\{P(k)\}\right)$..

На практиці число $\boldsymbol{k_0}$ визначається за допомогою двійчастої нерівності:

$$np - q \le k_o \le np + p\,, \tag{3.9}$$

де $q = 1 - p$.

Визначення $\boldsymbol{k_0}$ здійснюють у наступній послідовності:

1. спочатку визначають величину $\boldsymbol{np}$, і якщо np – **ціле** число, то

   $\boldsymbol{k_0 = np}$;
2. потім визначають величину $\boldsymbol{np{+}p}$,
   - якщо $(np+p)$ – ціле число, то існує два найімовірніших числа:

     $\boldsymbol{k_{01}} = np+p$ і $\boldsymbol{k_{02}} = k_{01}-1$;
   - якщо $(np+p)$ – неціле число, то

     $\boldsymbol{k_0}$ – ціле число в діапазоні $[np{-}q;\ np+p]$.

Задача 3.10 . Знайти найімовірніше число лекцій, які відвідав студент з $\boldsymbol{n}$ =15 запланованих в семестрі, якщо ймовірність відвідування кожної лекції дорівнює 0,9.

Розв'язання. За умовою задачі маємо :

$\boldsymbol{n}$=15, $\boldsymbol{p}$=0,9, $\boldsymbol{q}$ =1– 0,9= 0,1.

Обчислюємо $np = 15\cdot 0{,}9 = 13{,}5$; оскільки np – неціле число,

обчислюємо $np + p = 13{,}5 + 0{,}9 = 14{,}4$; оскільки $(np+p)$ – неціле число , то $\boldsymbol{k_0}$ – ціле число в діапазоні $[np-q;\, np+p]$:

$$np - q \le k_o \le np + p\ ;$$

$$15 \cdot 0{,}9 - 0{,}1 \le k_0 \le 15 \cdot 0{,}9 + 0{,}9\ ;$$

$$13{,}5 - 0{,}1 \le k_0 \le 13{,}5 + 0{,}9\ ;$$

$$13{,}4 \le k_0 \le 14{,}4\ ;$$

$$k_0 = 14\ .$$

Задача 3.11 . Знайти найімовірніше число випадіння 6 очок при 11 підкиданнях ігрового кубику?

Розв'язання. За умовою задачі маємо:

загальне число експериментів $\boldsymbol{n}=11$,

ймовірність настання події в одному експерименті (випадіння шести очок)

$$\boldsymbol{p} = \frac{1}{6}; \quad \boldsymbol{q} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}\ .$$

Спочатку обчислюємо $\boldsymbol{np} = 11 \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{6}$.

Далі, оскільки $\boldsymbol{np}$ – неціле число, обчислюємо $\boldsymbol{np+p} = \frac{11}{6} + \frac{1}{6} = \frac{12}{6} = 2$.

Оскільки $(np+p)$ – ціле число, то існують два найімовірніших числа:

$$\boldsymbol{k_{01}} = np+p = 2 \quad \text{і} \quad \boldsymbol{k_{02}} = np-q = k_{01}-1 = 1.$$

3.3. Контрольні запитання

1. З якою метою використовують формулу повної ймовірності?
2. Які події називаються гіпотезами?
3. Навести формулу повної ймовірності.
4. Сформулювати теорему Байєса.
5. Яке призначення формули Байєса?
6. Що називають схемою Бернуллі?
7. Які експерименти є незалежними?
8. Сформулювати теорему Бернуллі.
9. При якому числі незалежних експериментів рекомендується використовувати формулу Бернуллі?
10. Сформулювати локальну теорему Лапласа.
11. У чому принципова відмінність теореми Бернуллі від локальної теореми Лапласа?
12. Сформулювати теорему Пуассона.
13. Яке призначення теореми Пуассона?
14. Сформулювати інтегральну теорему Лапласа.
15. Яке призначення інтегральної теореми Лапласа?
16. Дати визначення найімовірнішому числу здійснення подій.
17. Як визначити найімовірніше число здійснення події.

4. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

4.1. Форми завдання дискретних випадкових величин

4.1.1. Основні визначення

Одним з основних понять теорії ймовірностей є поняття випадкової величини.

Визначення 4.1. ***Одновимірною випадковою величиною***, називають величину, що у результаті експерименту приймає заздалегідь невідоме значення.

Приклади випадкових величин:

1. кількість студентів, що присутні на лекції;
2. кількість сонячних днів у році;
3. вага осколка снаряда, що розірвався;
4. час очікування громадського транспорту на зупинці;
5. температура навколишнього середовища.

Для позначення випадкових величин використовують великі літери латинського алфавіту X, Y, Z, а для позначення їх можливих значень – відповідно малі літери x, y, z.

За типом простору можливих значень випадкові величини діляться на ***дискретні*** і ***неперервні***.

Визначення 4.2. Випадкова величина називається ***дискретною***, якщо:

1. сукупність її можливих значень удається перерахувати − $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (або $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$), тобто значення належать зчисленної множині − скінченній або нескінченній;
2. можна знайти відповідні ймовірності $p_k = P\{X = x_k\}$ того, що випадкова величина X приймає ці значення .

Аби мати вичерпну характеристику випадкової величини, необхідно знати її закон розподілу.

Визначення 4.3. ***Закон розподілу*** випадкової величини – це співвідношення, що встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини і відповідними ймовірностями.

4.1.2. Форми завдання закону розподілу дискретної випадкової величини

У теорії ймовірностей розрізняють декілька форм завдання закону розподілу дискретної випадкової величини, найбільш корисні з яких є три:

1. ряд розподілу;
2. многокутник розподілу;
3. інтегральна функція розподілу.

Розглянемо послідовно кожну форму завдання закону розподілу дискретної випадкової величини.

Найбільш простою формою завдання закону розподілу є ряд розподілу**.**

Ряд розподілу являє собою таблицю, що складається з двох рядків. У першому рядку розташовуються в порядку зростання всі можливі значення дискретної випадкової величини. В другому – відповідні ймовірності.

Загальний вид ряду розподілу відповідає табл.4.1.

Таблиця 4.1 − Закон розподілу у вигляді ряду розподілу

$\boldsymbol{x_i}$	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
$\boldsymbol{p_i}$	p_1	p_2	...	p_i	...	p_n

В результаті експерименту випадкова дискретна величина повинна прийняти одне з можливих значень.

Оскільки всі можливі події $\{X = x_1\}$, $\{X = x_2\}$, ... утворюють повну групу несумісних подій, то сума відповідних імовірностей обов'язково повинна дорівнювати одиниці (умова нормування)

$$\sum_{i=1}^{n\,(+\infty)} p_i = 1 . \tag{4.1}$$

Многокутник розподілу це графічне зображення ряду розподілу ймовірностей. По осі абсцис відкладаються можливі значення випадкової величини, а по осі ординат − імовірності цих значень. Для наочності отримані точки з'єднуються відрізками прямих.

Таким чином ***многокутник розподілу*** – це діаграма залежності ймовірностей p_i можливих значень випадкової величини від самих цих значень x_i (i={1, 2, …,n}) (рис. 4.1).

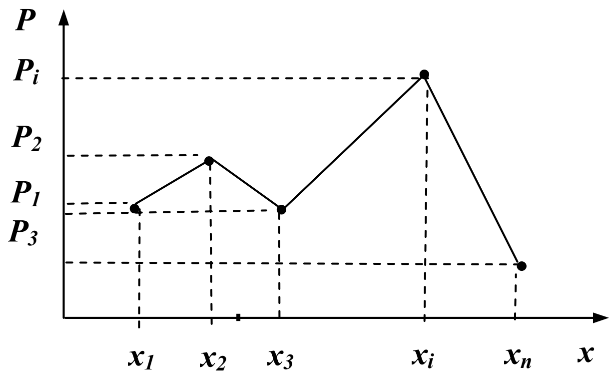


Рис. 4.1

Визначення 4.4. ***Інтегральною функцією розподілу*** випадкової величини X називається функція $F(x)$, яка при кожному значенні свого аргументу x чисельно дорівнює ймовірності того, що випадкова величина X опиниться менше, ніж значення аргументу x, тобто

$$F(x) = P\{X < x\}. \tag{4.2}$$

Інтегральна функція має **властивості**:

Властивість 1. $0 \le F(x) \le 1$, оскільки $F(x)$ – ймовірність.

Властивість 2. $F(x)$ – неспадна функція,

тобто якщо $x_2 > x_1$, то $F(x_2) \ge F(x_1)$.

Доведення. Нехай $x_2 > x_1$, тоді подію, яка полягає в тому, що випадкова величина X прийме значення менше x_2, можна розділити на дві несумісні події: A_1 – X прийме значення менше x_1 з імовірністю $P\{X<x_1\}$;

A_2 – X прийме значення з інтервалу $x_1 \le X < x_2$ з імовірністю $P\{x_1 \le X < x_2\}$;

За теоремою додавання несумісних подій отримуємо:

$$P\{X < x_2\} = P(A_1 + A_2) = P\{X < x_1\} + P\{x_1 \le X < x_2\}\ .$$

Звідси

$$P\{X < x_2\} - P\{X < x_1\} = P\{x_1 \le X < x_2\}\ ,$$

$$F(x_2) - F(x_1) = P\{x_1 \le X < x_2\} \ge 0\,,$$ що і требо було довести.

Отже, $F(x)$ – неспадна функція.

Наслідок 1. ***Ймовірність влучення випадкової величини в заданий діапазон***

Ймовірність того, що випадкова величина прийме значення, що містяться в інтервалі *(a, b)*, дорівнює приросту функції розподілу на цьому інтервалі:

$$P\{a \le X < b\} = F(b) - F(a) \tag{4.3}$$

Властивість 3.

$\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$; оскільки $P\{X < -\infty\} = 0$ − неможлива подія.

$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$; оскільки $P\{X < +\infty\} = 1$ − достовірна подія.

Властивість 4. $F(x)$ – неперервна зліва функція, тобто $\lim\limits_{x\to a-0} F(x) = F(a)$. .

Аналітичний запис функції розподілу *F(x)* має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0\,, & x \le 0; \\ \sum_{i:\,x_i < x} p_{i,} & x > 0. \end{cases} \quad .... \tag{4.4}$$

Тобто для дискретних випадкових величин *F(x)* – розривна ступінчаста функція, неперервна зліва (рис. 4.2).

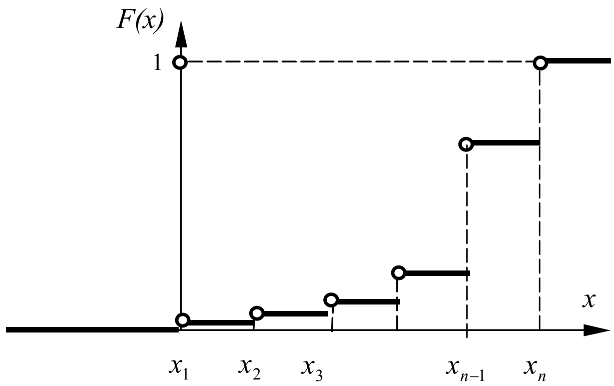


Рис. 4.2.

Задача 4.1. Ймовірність здачі в запланований термін для кожного з трьох будинків, що будуються однакова і дорівнює 0,9. Необхідно:

1). Побудувати закон розподілу випадкової величини $\boldsymbol{X}$ – кількість будинків, які здано в експлуатацію в запланований термін.

2). Визначити ймовірність попадання випадкової величини $\boldsymbol{X}$ в діапазон [2,5; 3,5), тобто ймовірність $P\{2{,}5 \le X < 3{,}5\}$.

Розв'язання. Випадкова величина $\boldsymbol{X}$ – кількість будинків, зданих в експлуатацію в запланований термін – може приймати значення 0, 1, 2 або 3.

1). За умовами прикладу

$\boldsymbol{n} = 3$ − загальна кількість експериментів (кількість будинків),

$\boldsymbol{p} = 0{,}9$ − ймовірність побудови кожного будинку у запланований термін,

$\boldsymbol{q} = 1 - p = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$.

Тоді ймовірності p_i ($i = 0,1,2,3$) того, що з 3 будинків у запланований термін буде здано рівно 0, 1, 2 або 3 визначаються за допомогою формули **Бернуллі**:

$$p_0 = P\{X = 0\} = P_3(0) = C_3^0 p^0 q^{3-0} = 1 \cdot 0{,}9^0 \cdot 0{,}1^3 = 0{,}001 \ ;$$

$$p_1 = P\{X = 1\} = P_3(1) = C_3^1 p^1 q^{3-1} = 1 \cdot 0{,}9^1 \cdot 0{,}1^2 = 0{,}027 \ ;$$

$$p_2 = P\{X = 2\} = P_3(2) = C_3^2 p^2 q^{3-2} = 1 \cdot 0{,}9^2 \cdot 0{,}1^1 = 0{,}243 \ ;$$

$$p_3 = P\{X = 3\} = P_3(3) = C_3^3 p^3 q^{3-3} = 1 \cdot 0{,}9^3 \cdot 0{,}1^0 = 0{,}729 \ .$$

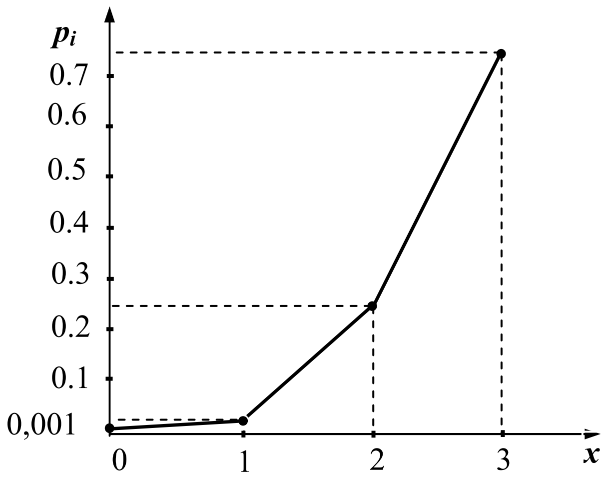
Ряд розподілу випадкової величини $\boldsymbol{X}$ набуває вигляду

$\boldsymbol{x_i}$	**0**	**1**	**2**	**3**
$\boldsymbol{p_i}$	0,001	0,027	0,243	0,729

Перевіримо критерій слушності побудови закону розподілу (рівність одиниці суми значень імовірностей у другому рядку ряду розподілу), тобто умову нормування за формулою (4.1):

$$\sum_{i=1}^{4} p_i = 0{,}001 + 0{,}027 + 0{,}243 + 0{,}729 = 1 \ .$$

Побудуємо **многокутник розподілу**.



Побудуємо інтегральну функцію ***F(x)*** випадкової величини ***X.***

При побудови графіку $F(x)$ вісь абсцис можливими значеннями випадкової величини розбивається на $(n+1)$ діапазон, в кожному з таких діапазонів функції $F(x)$ має постійне значення:

$x \le 0 \qquad F(x) = P\{X< 0\}= 0$;

$0 < x \le 1 \qquad F(x) = P\{X< 1\}= P\{X=0\} = 0{,}001$;

$1 < x \le 2 \qquad F(x) = P\{X< 2\}= P\{X=0\} + P\{X=1\} = 0{,}001 + 0{,}027 = 0{,}028$;

$2 < x \le 3 \qquad F(x) = P\{X< 3\}=P\{X=0\} + P\{X=1\} + P\{X=2\}= 0{,}028+ 0{,}243=0{,}271$;

$3 < x \le +\infty \qquad F(x) = P\{X<+\infty\} = P\{X=0\}+ P\{X=1\} + P\{X=2\} + P\{X=3\} =$
$= 0{,}001 + 0{,}027 + 0{,}243 + 0{,}729 = 1.$

Таким чином, **аналітичний запис** функції розподілу $F(x)$ має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x \le 0;, \\ 0{,}001, & при \quad 0 \le x < 1; \\ 0{,}028, & при \quad 1 \le x < 2; \\ 0{,}271, & при \quad 2 \le x < 3; \\ 1, & при \quad x > 3. \end{cases}$$

На рис.4.3 зображений **графік** інтегральної функції розподілу, що побудована відповідно до її аналітичного запису.

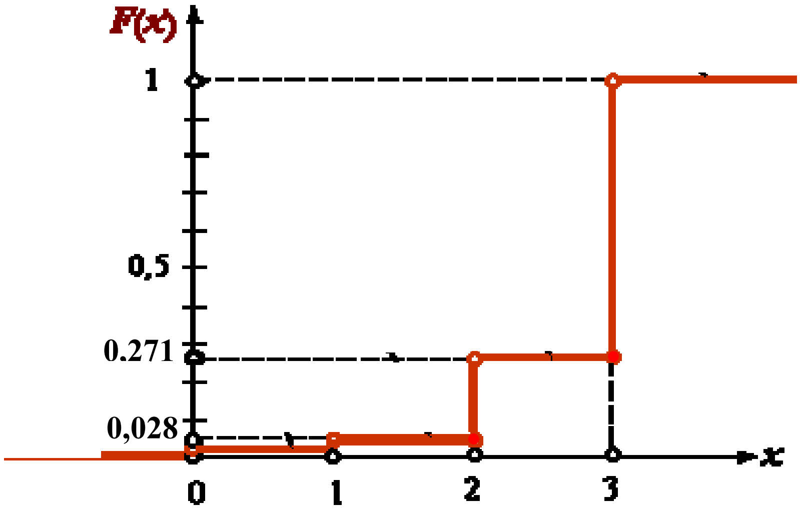


Рис. 4.3

2). Визначимо ймовірність попадання випадкової величини X в діапазон [2,5; 3,5). У даному випадку $a = 2{,}5$, а $b = 3{,}5$.

Підставляючи у формулу (4.3) значення аргументу інтегральної функції і обчислюючи значення інтегральної функції на границях заданого діапазону, одержуємо шуканий результат:

$$P\{2{,}5 \le X < 3{,}5\} = F(b) - F(a) =$$

$$=F(3{,}5)–(2{,}5) = 1– 0{,}271 = 0{,}729.$$

Шукана ймовірність і значення інтегральної функції $F(x)$ легко визначаються за графіком інтегральної функції (див. рис.4.4).

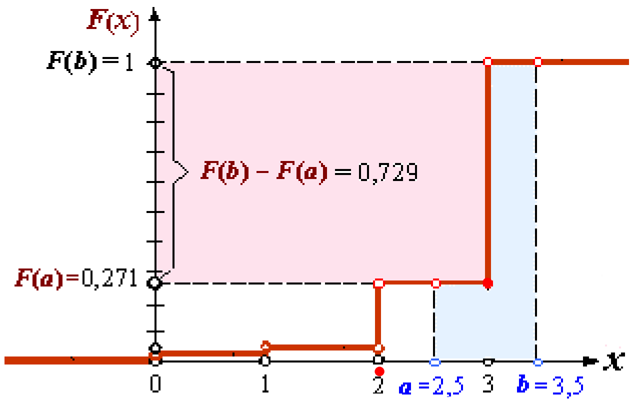


Рис. 4.4

4.2. Форми завдання неперервної випадкової величини та її властивості

4.2.1. Основні визначення

Визначення 4.5. Випадкова величина називається ***неперервної***, якщо:

1. множина її значень співпадає з проміжком (кількома проміжками) числової осі, множина може бути обмеженою або необмеженою;

2. ймовірність того, що випадкова величина набуває будь-якого наперед заданого значення x_i , дорівнює нулю.

$$P\{X=a\}=\lim_{b\to a}P\{a\le X<b\}=\lim_{b\to a}[F(b)-F(a)]=F(a)-F(a)=0 \text{ , тобто}$$

$$P\{X=a\}=0.$$

Зауважимо, що хоча $P\{X=x_i\}=0$, подія $X=x_i$ є можливою.

В теорії ймовірностей розглядаються дві форми завдання закону розподілу неперервної випадкової величини:

1) інтегральна функція розподілу ймовірності;

2) щільність розподілу ймовірності.

Обидві форми абсолютно рівноправні. Перша характеризує розподіл імовірностей у залежності від діапазону значень неперервної випадкової величини, а друга – від конкретних значень.

4.2.2. Інтегральна функція розподілу

Інтегральна функція розподілу ймовірності – це універсальна форма завдання випадкових величин. З її допомогою можна задати закон розподілу як дискретної випадкової величини, так і неперервної.

При числі діапазонів $n\to\infty$ дискретна функція розподілу перетворюється в неперервну інтегральну функцію розподілу *F(x),* **зберігаючи всі її властивості**.

Для інтегральної функції неперервної випадкової величини також справедлива формула (4.3), що дозволяє обчислювати ймовірність влучення значень випадкової величини в заданий діапазон $[a,b)$ (рис. 4.5).

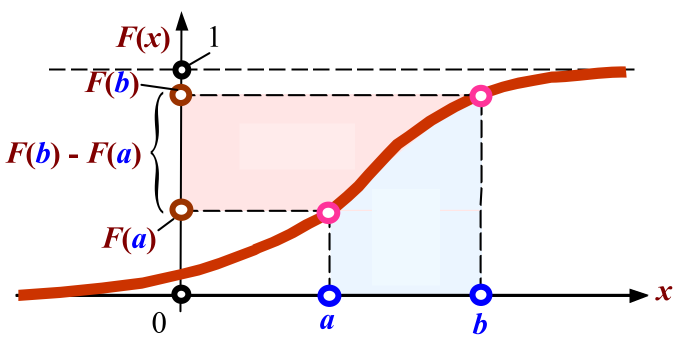


Рис. 4.5

4.2.3. Щільність розподілу ймовірності

За визначенням інтегральна функція розподілу ймовірності характеризує діапазони значень $(-\infty, x)$ неперервної випадкової величини. Проте, становить інтерес і функція, що здатна характеризувати кожне значення неперервної величини. Такою функцією є щільність розподілу ймовірності.

Функція щільності розподілу ймовірності $f(x)$ являє собою відношення ймовірності влучення неперервної випадкової величини в малий діапазон $[x,x+\Delta x)$, до довжини цього діапазону Δx:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\{X \in [x, x+\Delta x]\}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\{x \le X < (x+\Delta x)\}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{dF}{dx}.$$

Визначення 4.6. ***Щільністю розподілу ймовірності*** неперервної випадкової величини називається функція $\boldsymbol{f(x)}$, що є першою похідною від інтегральної функції розподілу ймовірності $F(x)$

$$f(x) = F'(x). \tag{4.5}$$

Якщо випадкова величина задана щільністю розподілу, то функцію розподілу можна знайти за формулою

.
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \tag{4.6}$$

Щільність розподілу $f(x)$ неперервної випадкової величини успадковує усі властивості інтегральної функції розподілу $F(x)$.

Властивості щільності розподілу:

Властивість 1. Інтеграл у нескінченних границях від щільності розподілу дорівнює одиниці (умова нормування)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1. \tag{4.7}$$

Доведення. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} = F(\infty) - F(-\infty) = 1 - 0 = 1$.

Геометричний зміст рівності (4.7) полягає в рівності одиниці площі, обмеженої графіком функції $f(x)$ і віссю абсцис.

Властивість 2. Щільність розподілу – функція невід'ємна

$$f(x) \geq 0. \qquad (4.8)$$

Оскільки її первісна $F(x)$ є неспадною функцією.

Властивість 3. Ймовірність влучення неперервної випадкової величини в заданий діапазон $[a,b)$

$$P\{a \leq X < b\} = \int_a^b f(x)dx. \qquad (4.9)$$

Доведення.

$$P\{a \leq X < b\} = F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{b} f(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)dx =$$

$$= \int_a^b f(x)dx.$$

На рис.4.6 дана графічна інтерпретація ймовірності влучення неперервної випадкової величини в діапазон $[a,b)$. Чисельно значення такої ймовірності дорівнює заштрихованій площі.

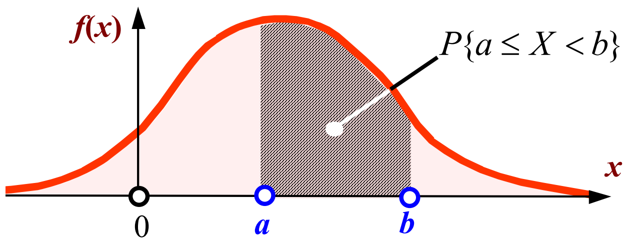


Рис.4.6

4.3. Числові характеристики випадкових величин

Повну інформацію про випадкову величину дає її закон розподілу ймовірності. Проте, часто таких даних дослідники не мають в своєму розпорядженні, та і вони не є обов'язковими. Досить охарактеризувати випадкову величину декількома числами. Числові характеристики випадкових величин кількісно визначають їх властивості, дозволяють проводити порівняльний аналіз випадкових величин, давати оцінку очікуваним результатам експерименту, знаходити зв'язок і визначати залежність між різними випадковими величинами.

Числові характеристики випадкових величин – це **не випадкові** величини. Кожна числова характеристика має тільки одне значення, що не залежить ні від результату конкретного експерименту, ні від кількості проведених експериментів.

4.3.1. Характеристики положення випадкової величини на числовій осі

До числових характеристик положення випадкової величини на числовій осі відносяться:

1. математичне сподівання;
2. мода;
3. медіана.

Визначення 4.7. ***Математичне сподівання*** – це середньовиважене за ймовірностями значення випадкової величини.

Математичне сподівання характеризує *зміщення значень* випадкової величини на числовій осі *x відносно початку координат*. . Математичне сподівання інколи називають просто ***середнім значенням*** випадкової величин.

Математичне сподівання випадкової величини будемо позначати $\boldsymbol{m_x}$ або **M[X]**. Розмірність математичного чекання збігається з розмірністю випадкової величини ***X***.

Математичне сподівання ***дискретної*** випадкової величини визначається за формулою

$$m_x = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \ , \tag{4.10}$$

де x_i і p_i – i-те можливе значення дискретної випадкової величини і відповідна ймовірність, $i = \overline{1,n}$.

Математичне сподівання ***неперервної*** випадкової величини визначається за формулою

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx \ , \tag{4.11}$$

де x – неперервна випадкова величина; $f(x)$ – щільність розподілу величини x.

На рис.4.7 наведені графіки функцій щільності розподілу двох неперервних випадкових величин, з різними математичними сподіваннями $(m_{x2} > m_{x1})$.

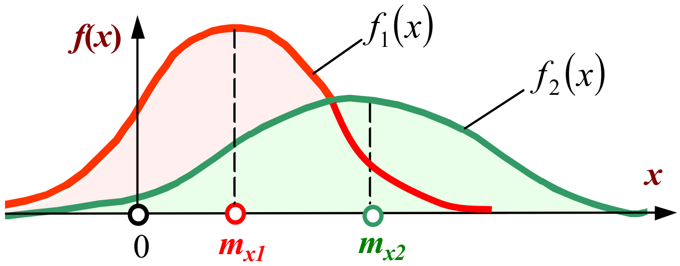


Рис.4.7

Математичне сподівання випадкової величини є найбільш важливою її числовою характеристикою, з якій безпосередньо зв'язана більша частина всіх числових характеристик випадкової величини.

Визначення 4.8. ***Модою*** називають найбільш імовірне значення випадкової величини.

Позначається мода випадкової величини символом $\boldsymbol{\mu}$.

Мода $\boldsymbol{\mu}$ ***дискретної*** випадкової величини дорівнює такому її значенню x_m, якому відповідає максимальна ймовірність $p_\mu = \max\limits_{i=1,n}\{p_i\}$.

Мода $\boldsymbol{\mu}$ ***неперервної*** випадкової величини дорівнює такому значенню аргументу x_μ функції щільності розподілу $f(x)$, при якому $f(x_\mu) = \max\limits_{x \in R^1} f(x)$.

На рис.4.8 показана мода неперервної ***унімодальної*** (з одною модою) випадкової величини, заданої щільністю розподілу.

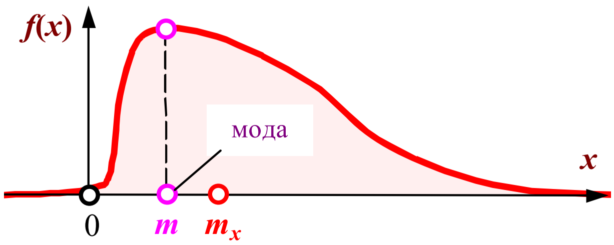


Рис.4.8

Крім унімодальних розподілів випадкових величин, розрізняють ***полімодальні*** (рис.4.9,*а*), ***антимодальні*** (рис.4.9,*б)* і ***безмодальні*** (рис.4.9,*в)*.

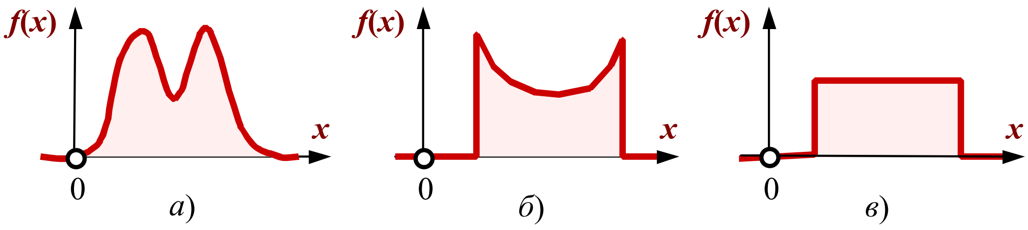


Рис.4.9

Ще одна характеристика положення випадкової величини на числовій осі – *медіану*. Позначається вона як ***Me***.

Визначення 4.9. ***Медіаною*** називають таке значення ***Me*** випадкової величини, для якого справедлива рівність $P\{X < Me\} = P\{X > Me\}$

Для неперервної випадкової величини перпендикуляр до числової осі, що проходить через медіану, поділяє площу, обмежену графіком щільності розподілу $f(x)$ і числовою віссю x, на дві рівні частини по 0,5 (рис.4.10).

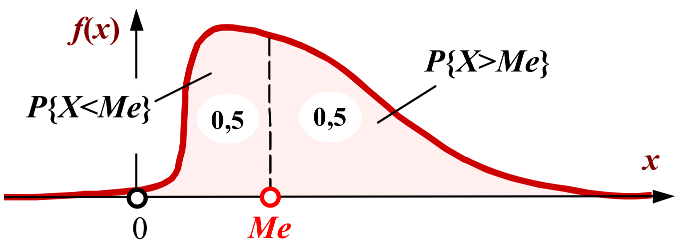


Рис.4.10

Таким чином, медіана може бути визначена за допомогою рівняння

$$\int_{-\infty}^{Me} f(x)dx = \int_{Me}^{+\infty} f(x)dx = 0,5 \quad . \qquad (4.12)$$

Для симетричного унімодального закону розподілу випадкової величини значення математичного сподівання, моди і медіани збігаються.

4.3.2. Моменти випадкових величин

Для характеристики різних властивостей випадкових величин використовуються початкові і центральні моменти.

Визначення 4.10. ***Початковим моментом k-го порядку*** $\boldsymbol{\alpha_k}$ називають математичне сподівання k–го степеня випадкової величини

$$\alpha_k = M[X^k] \tag{4.13}$$

k–й початковий момент визначається за формулами:

$$\alpha_k = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n(+\infty)} x_i^k p_i, & \text{якщо в.в.} X - \text{дискретна,} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot f(x)\, dx, & \text{якщо в.в.} X - \text{неперервна} \end{cases} \tag{4.14}$$

Визначення 4.11. Відхилення випадкової величини від математичного сподівання називають ***центрованою випадковою величиною***.

$$\overset{\circ}{X} = (X - m_x)\,. \tag{4.15}$$

Визначення 4.12. ***Центральним моментом s-го порядку*** $\boldsymbol{\mu_s}$ називають математичне сподівання s-го степеня центрованої випадкової величини

$$\mu_s = M[(X – m_x)^s]. \tag{4.16}$$

Центральним моментом s-го порядку визначається за формулами:

$$\mu_s = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n(+\infty)} \left(x_i - m_x\right)^s \cdot p_i, & \text{якщо в.в.} X - \text{дискретна,} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(x - m_x\right)^s \cdot f(x)\, dx, & \text{якщо в.в.} X - \text{неперервна.} \end{cases} \tag{4.17}$$

4.3.3. Властивості моментів випадкових величин

Особливої уваги заслуговують властивості початкових і центральних моментів першого і другого порядків.

Властивість 1. ***Перший початковий момент*** (початковий момент 1-го порядку) α_1 випадкової величини являє собою її математичне сподівання випадкової величини:

$$\alpha_1 = M[X^1] = m_x\,. \tag{4.18}$$

Властивість 2. ***Перший центральний момент*** (центральний момент 1-го порядку) μ_1 будь-якої випадкової величини завжди дорівнює нулю:

$$\mu_1 = M\left[(X - m_x)^1\right] = \sum_{i=1}^{n(+\infty)} (x_i - m_x) p_i = \sum_{i=1}^{n(+\infty)} x_i p_i - \sum_{i=1}^{n(+\infty)} m_x p_i = m_x - m_x \sum_{i=1}^{n(+\infty)} p_i = m_x - m_x = 0.$$

Аналогічно для неперервної випадкової величини:

$$\mu_1 = M\left[(X - m_x)^1\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x) \cdot f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx - \int_{-\infty}^{\infty} m_x f(x)\, dx =$$

$$= m_x - m_x \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = m_x - m_x = 0.$$

Перший центральний момент на практиці не використовується, оскільки нічого не характеризує.

Властивість 3. ***Другий початковий момент*** α_2 випадкової величини характеризує *ступінь відхилення* випадкової величини навколо її математичного сподівання, а також *зміщення випадкової* величини на числовій осі відносно початку координат.

Визначається за формулою:

$$\alpha_2 = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n(+\infty)} x_i^2 p_i, & \textit{якщо} \quad \textit{в.в.} X - \textit{дискретна}; \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)\, dx, & \textit{якщо} \quad \textit{в.в.} X - \textit{неперервна}. \end{cases} \tag{4.19}$$

Другий початковий момент характеризує відразу дві властивості випадкової величини, однак як самостійна числова характеристика не використовується.

Властивість 4. Другий центральний момент μ_2 має назву – ***дисперсія*** і характеризує ступінь відхилення випадкової величини навколо її математичного сподівання.

Визначається за формулою:

$$D_X = \mu_2 = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n(+\infty)} \left(x_i - m_x\right)^2 \cdot p_i, & \text{якщо} \quad \text{в.в.} X - \text{дискретна}, \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(x - m_x\right)^2 \cdot f(x)\, dx, & \text{якщо} \quad \text{в.в.} X - \text{неперервна} \end{cases} \tag{4.20}$$

Дисперсія має розмірність квадрата випадкової величини.

Оскільки дисперсія характеризує тільки відхилення випадкової величини, вона в порівнянні з другим початковим моментом є більш важливою числовою характеристикою.

На рис. 4.11 показані функції щільності розподілу двох неперервних випадкових величин з однаковими математичними сподіваннями $(m_{x_1} = m_{x_2})$ і різними дисперсіями $(D_{x_1} < D_{x_2})$.

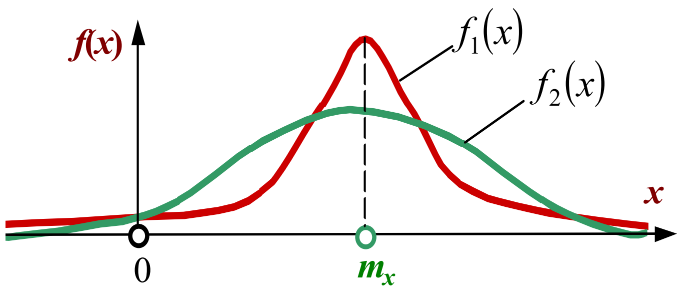


Рис.4.11

Визначення дисперсії D_x для неперервних випадкових величин зв'язано з трудомісткими обчисленнями визначених інтегралів. На практиці дисперсію обчислюють за допомогою другого початкового моменту α_2 і математичного сподівання (першого початкового моменту) m_x.

Розглянемо математичні перетворення:

$$D_x = M\left[\left(X - m_x\right)^2\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(x - m_x\right)^2 f(x) dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - 2m_x \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx + m_x{}^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - 2m_x \cdot m_x + m_x{}^2 \cdot 1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - m_x{}^2 \; .$$

Таким чином,

$$D(X)=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n(+\infty)}\left(x_i-m_x\right)^2\cdot p_i=\sum\limits_{i=1}^{n(+\infty)}x_i^2\cdot p_i-\left(\sum\limits_{i=1}^{n(+\infty)}x_i\cdot p_i\right)^2=\alpha_2-\left[M(X)\right]^2, & для\quad ДВВ\quad X;\\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(x-m_x\right)^2\cdot f(x)\,dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot f(x)\,dx-\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)\right)^2=\alpha_2-\left[M(X)\right]^2, & для\quad НВВ\quad X.\end{cases}$$

Звідси

$$D_x=\alpha_2-m_x^2. \tag{4.21}$$

$$\alpha_2=D_x+m_x^2. \tag{4.22}$$

Оскільки дисперсія має розмірність квадрата випадкової величини, а на практиці зручніше використовувати лінійні величини, то розглядають ще одну характеристику випадкової величини − *середнє квадратичне відхилення.*

Властивість 5. ***Середнє квадратичне відхилення*** являє собою квадратний корінь з дисперсії

$$\sigma_x=\sqrt{D_x}. \tag{4.23}$$

Помилка виміру є середнє квадратичне відхилення вимірюваної величини від її дійсного значення.

Для аналізу випадкових величин мають значення і моменти більш високих порядків. Особливої уваги заслуговують третій і четвертий центральні моменти.

Властивість 6. Третій центральний момент характеризує *ступінь відхилення* випадкової величини навколо математичного сподівання, а також ступінь ***асиметрії*** її закону розподілу.

Третій центральний момент обчислюється за формулою:

$$\mu_3=M\left[\left(X-m_x\right)^3\right]=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n(+\infty)}\left(x_i-m_x\right)^3\cdot p_i, & якщо\quad в.в.X-дискретна;\\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(x-m_x\right)^3\cdot f(x)\,dx, & якщо\quad в.в.X-неперервна.\end{cases} \tag{4.24}$$

У випадку симетричного закону розподілу $\mu_3=0$.

Для характеристики тільки ступеня асиметрії використовується ***коефіцієнт асиметрії***

$$S_k = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3}. \tag{4.25}$$

У випадку симетричного закону розподілу коефіцієнт асиметрії $S_k = 0$.

На рис.4.12 показані дві неперервні випадкові величини, задані у виді щільності розподілу, з різними за знаком коефіцієнтами асиметрії.

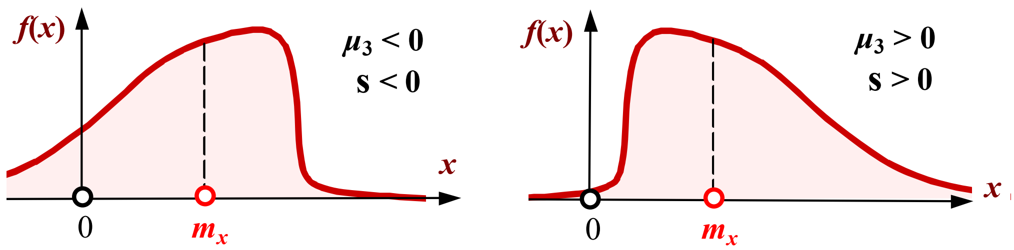


Рис.4.12

Властивість 7. ***Четвертий центральний момент*** характеризує ступінь відхилення випадкової величини навколо математичного сподівання, а також ступінь гостровершинності її закону розподілу.

Обчислюється за формулою

$$\mu_4 = M\left[(X - m_x)^4\right] = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n(+\infty)} (x_i - m_x)^4 \cdot p_i, & \textit{якщо} \quad \textit{в.в.} X - \textit{дискретна}; \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^4 \cdot f(x)\, dx, & \textit{якщо} \quad \textit{в.в.} X - \textit{неперервна}. \end{cases} \tag{4.26}$$

Для характеристики *тільки ступеня гостровершинності* закону розподілу використовується величина ***ексцес***

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3. \tag{4.27}$$

У випадку *нормального* закону розподілу випадкової величини ексцес дорівнює нулю, тобто $E = 0$.

На рис.4.13 показані графіки функції щільності розподілу трьох неперервних випадкових величин з різними величинами ексцесів, де $E_1 = 0$, $E_2 > 0$, а $E_3 < 0$.

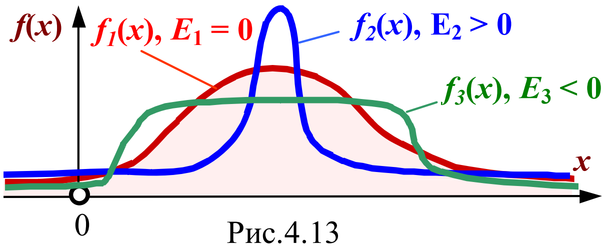


Рис.4.13

Задача 4.2. В умовах задачі 4.1 визначити числові характеристики випадкової величини $\boldsymbol{X}$ – кількості будинків, які здано в експлуатацію в запланований термін. Найти також моду $\boldsymbol{\mu}$ і ймовірність попадання випадкової величини $\boldsymbol{X}$ в інтервал значень $[0; 2,5)$.

Розв'язання. Знайдений раніше ряд розподілу випадкової величини $\boldsymbol{X}$ має вигляд

x_i	**0**	**1**	**2**	**3**
p_i	0,001	0,027	0,243	0,729

Математичне сповідання m_x випадкової величини $\boldsymbol{X}$ визначають за формулою (4.10) при $n = 4$:

$$m_x = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4 = 0 \cdot 0{,}001 + 1 \cdot 0{,}027 + 2 \cdot 0{,}243 + 3 \cdot 0{,}729 = 2{,}7$$

Дисперсію випадкової величини $\boldsymbol{X}$ визначають за формулою (4.21):

$$D_x = \alpha_2 - m_x^2 =$$
$$= \sum_{i=1}^{4} x_i^{\ 2} p_i - m_x^2 = 0^2 \cdot 0{,}001 + 1^2 \cdot 0{,}027 + 2^2 \cdot 0{,}243 + 3^2 \cdot 0{,}729 - 2{,}7^2 = 7{,}56 - 2{,}7^2 = 0{,}27.$$

Середнє квадратичне відхилення випадкової величини $\boldsymbol{X}$ визначають за формулою (4.22):

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{0{,}27} \approx 0{,}5196 \ .$$

Знайдемо моду $\boldsymbol{\mu}$. $\boldsymbol{\mu} = 3$ оскільки значенню $x_4 = 3$ відповідає максимальна ймовірність $\boldsymbol{p_3} = 0{,}729$.

Ймовірність попадання випадкової величини в заданий інтервал значень від $x_1 = 0$ до $x_2 = 2{,}5$ можна визначити двома способами:

а) $P\{0 \le X < 2{,}5\} = F(2{,}5) - F(0) = 0{,}271 - 0 = 0{,}271$.

б) $P\{0 \le X < 2{,}5\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} = 0{,}001 + 0{,}027 + 0{,}243 = 0{,}271$.

Задача 4.3. Неперервна випадкова величина ***X*** задана щільністю розподілу

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \notin [0;\,1]; \\ cx & \text{при} \quad x \in [0;\,1]. \end{cases}$$

Знайти значення щільністю постійною *c*, інтегральну функцію розподілу *F(x)*. Побудувати графік щільності розподілу *f(x),* графік інтегральної функції розподілу *F(x).* Визначити математичне сповідання m_x , дисперсію D_x , середнєквадратичне відхилення σ_x, медіану *Me* і ймовірність попадання випадкової величини в інтервал (0; 0,5).

Розв'язання. Постійна величина *c* визначається за допомогою властивості щільності розподілу (4.7).

Оскільки задана *f(*x) – кусочно-неперервна, то розглядається сума інтегралів на проміжках неперервності:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{1} cxdx + \int_{1}^{\infty} 0 \cdot dx = 0 + \left.\frac{cx^2}{2}\right|_0^1 + 0 = \frac{c}{2}.$$

Отримуємо рівняння $\frac{c}{2} = 1$, з якого $c = 2$.

Щільність розподілу набуде вигляду: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \notin [0;\,1]; \\ 2x & \text{при} \quad x \in [0;\,1]. \end{cases}$

Інтегральну функцію розподілу $F(x)$ визначають за формулою (4.6) для кожного проміжку неперервності:

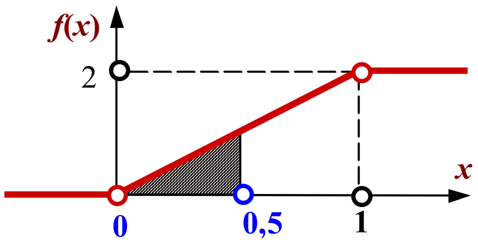
при $x \le 0$ $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot dt = 0$;

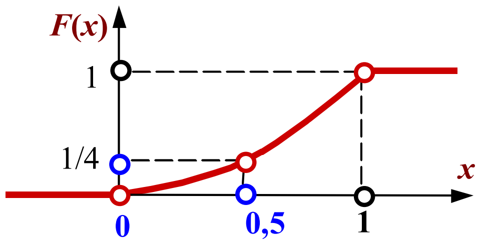
при $0 < x \le 1$ $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dt + \int_{0}^{x} 2tdt = 0 + t^2\Big|_0^x = x^2$;

при $x > 1$ $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dt + \int_{0}^{1} 2tdt + \int_{1}^{x} 0 \cdot dt = 0 + t^2\Big|_0^1 + 0 = 1$.

Остаточно отримуємо: $$F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad x\le 0;\\ x^2, & \text{якщо} \quad 0<x\le 1;\\ 1. & \text{якщо} \quad x>1.\end{cases}$$

Графіки *f*(x) і *F(X)* мають вигляд





Математичне сповідання m_x визначають за формулою (4.11):

$$m_x=\int_{-\infty}^{x} x\cdot f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} x\cdot 0\cdot dx+\int_{0}^{1} x\cdot 2x\cdot dx+\int_{1}^{\infty} x\cdot 0\cdot dx=0+2\int_{0}^{1} x^2dx+0=\left.\frac{2x^3}{3}\right|_0^1=\frac{2}{3}.$$

Дисперсію D_x визначають за формулою (4.21):

$$D_x=\alpha_2-m_x^2=$$
$$=\int_{-\infty}^{x} x^2\cdot f(x)dx-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\int_{-\infty}^{0} x^2\cdot 0\cdot dx+\int_{0}^{1} x^2\cdot 2x\cdot dx+\int_{1}^{\infty} x^2\cdot 0\cdot dx-\left(\frac{2}{3}\right)^2=0+2\int_{0}^{1} x^3dx+0-\left(\frac{2}{3}\right)^2=$$
$$=\left.\frac{2x^4}{4}\right|_0^1-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{18}.$$

Середнє квадратичне відхилення знайдемо за формулою (4.22):

$$\sigma_x=\sqrt{D_x}=\sqrt{\frac{1}{18}}=\frac{\sqrt{2}}{6}.$$

За визначенням медіани $P\{X<Me\}=P\{X>Me\}$. Отже, медіану можна знайти за рівнянням (4.12)

$$\int_{-\infty}^{Me} f(x)dx=\int_{Me}^{+\infty} f(x)dx=0{,}5\ .$$

$$\int_{-\infty}^{Me} f(x)dx = 0{,}5;$$

$$\int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{Me} 2xdx = 0{,}5;$$

$$x^2 \Big|_0^{Me} = 0{,}5;$$

$$(Me)^2 = 0{,}5;$$

$$Me \approx 0{,}71.$$

Шукану величину $P\{0<X<0{,}5\}$ визначимо двома способами:

$$P\{0 \le X < 0{,}5\} = \begin{cases} F(b) - F(a) = F(0{,}5) - F(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 0^2 = \frac{1}{4}; \\ \int_a^b f(x)dx = \int_0^{0{,}5} 2xdx = x^2 \Big|_0^{0{,}5} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 0^2 = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Знайденій імовірності відповідає заштрихована площа на графіку щільності ймовірності.

4.4. Контрольні запитання

1. Яку величину називають випадковою?
2. Визначення дискретної випадкової величини.
3. Визначення закону розподілу випадкової величини.
4. Форми завдання закону розподілу дискретної випадкової величини.
5. Що собою представляє ряд розподілу дискретної випадкової величини?
6. Що собою представляє многокутник розподілу дискретної випадкової величини?
7. Дати визначення інтегральної функції розподілу випадкової величини.
8. Властивості інтегральної функції розподілу.
9. Навести формулу визначення ймовірності влучення випадкової величини в заданий діапазон за допомогою інтегральної функції розподілу.
10. Визначення неперервної випадкової величини.
11. Які існують форми завдання закону розподілу неперервної випадкової величини?

12. У чому полягає основна відмінність інтегральної функції дискретної випадкової величини від інтегральної функції неперервної випадкової величини?

13. Визначення функції щільності розподілу ймовірності.

14. Властивості функції щільності розподілу ймовірності.

15. Визначення інтегральної функції розподілу за відомою щільністю розподілу.

16. Формула визначення ймовірності влучення неперервної випадкової величини в заданий діапазон значень за допомогою функції щільності розподілу.

17. Геометричну інтерпретація ймовірності влучення неперервної випадкової величини на задану ділянку числової осі.

18. Числові характеристики положення випадкової величини на числовій осі (математичне сподівання, мода, медіана).

19. Визначення математичного сподівання випадкової величини.

20. Формули для визначення математичного сподівання.

21. Визначення початкових моментів випадкових величин.

22. Формули для визначення початкових моментів.

23. Що називають центрованою випадковою величиною?

24. Визначення центральних моментів випадкових величин.

25. Формули для визначення центральних моментів.

26. Властивості моментів другого порядку випадкових величин.

27. Визначити дисперсію через початкові моменти.

28. Що характеризує середнє квадратичне відхилення?

29. Формули для визначення третього центрального моменту випадкової величини.

30. Що характеризує і як визначається коефіцієнт асиметрії?

31. Формулу для визначення четвертого центрального моменту випадкової величини.

32. Як визначається величина ексцес і що вона характеризує?

5. ОКРЕМІ ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ

5.1. Закони розподілу дискретних випадкових величин

Розглянемо кілька найбільш важливих законів розподілів дискретних випадкових величин:

1. розподіл Бернуллі;
2. біноміальний закон розподілу;
3. геометричний розподіл;
4. гіпергеометричний розподіл;
5. закон розподілу Пуассона.

5.1.1. Розподіл Бернуллі

Нехай проводиться один експеримент, у якому з ймовірністю $\boldsymbol{p}$ може відбутися деяка подія $\boldsymbol{A}$. Випадкова величина $\boldsymbol{X}$ – *число успіхів в одному випробуванні схеми Бернуллі* набуває значень **1** і **0** з ймовірністю $\boldsymbol{p}$ і **(1-** $\boldsymbol{p}$**)**, відповідно.

Тоді випадкова величина $\boldsymbol{X}$ має ***розподіл Бернуллі*** з параметром $\boldsymbol{p}$ (що можна записати у вигляді $X \in B_p$) і рядом розподілу (табл.5.1.):

Таблиця 5.1 - Ряд розподілу Бернуллі

x_i	**0**	**1**
p_i	**1–*p***	***p***

Сума ймовірностей у другому рядку ряду розподілу дорівнює 1, тобто

$$\sum_{i=0}^{1} p_i = 1 - p + p = 1 .$$

Знайдемо **числові характеристики випадкової величини.**

Математичне сподівання визначимо за формулою (4.10):

$$m_x = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p ; \tag{5.1}$$

Дисперсію визначимо за формулою (4.21):

$$D_x = \alpha_2 - m_x^2 = 0^2 \cdot (1-p) + 1^2 \cdot p - p^2 = p - p^2 = p \cdot (1-p) . \tag{5.2}$$

Середнє квадратичне відхилення визначимо за формулою (4.23)

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{p(1-p)} \tag{5.3}$$

5.1.2. Біноміальний закон розподілу

Нехай проводиться ***n*** незалежних експериментів, у кожному з яких з однаковою ймовірністю ***p*** може відбутися деяка подія ***A***. Випадкова величина ***X*** – *число експериментів, у яких відбувається подія* ***A*** *при* ***n*** *випробуваннях схеми Бернуллі* набуває значень **0,1, …, *n*** з ймовірностями

$$P\{X = m\} = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}.$$

Тоді випадкова величина ***X*** має ***біноміальний закон розподілу*** з параметрами ***n*** *і* ***p*** (що можна записати у вигляді $X \in B_{n,p}$) і рядом розподілу (табл. 5.2):

Таблиця 5.2 - Біноміальний ряд розподілу

x_i	0	1	. . .	m	. . .	n
p_i	$(1-p)^n$	$np(1-p)^{n-1}$	. . .	$C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$	. . .	p^n

Сума ймовірностей у другому рядку ряду розподілу дорівнює одиниці, тобто $\sum_{i=0}^{n} C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = 1.$

Оскільки суму $\sum_{i=0}^{n} C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$ можна розглядати як розкладання біному Ньютона зі змінними p і $(1-p)$, тобто

$$\sum_{i=0}^{n} C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = [\, p + (1-p)\,]^n = 1\ .$$

Ймовірність влучення дискретної випадкової величини, розподіленої за біноміальним законом, у заданий діапазон значень визначається за допомогою формули

$$P\{k_1 \le X \le k_2\} = \sum_{i=k_1}^{k_2} C_n^i p^i (1-p)^{n-i}. \tag{5.4}$$

Знайдемо **числові характеристики випадкової величини.**

Математичне сподівання. Розглянемо попередньо випадкову величину X_i – число появ події A в i-му експерименті, $i=\overline{1,n}$, з рядом розподілу:

x_i	0	1
p_i	$1-p$	p

.

Математичне сподівання для X_i визначимо за формулою (4.10):

$$m_i = 0\cdot(1-p)+1\cdot p = p .$$

Біноміальна випадкова величина X є сумою величин X_i. Тоді її математичне сподівання визначиться наступним перетворенням:

$$m_x = M[X] = M\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} M[X_i] = \sum_{i=1}^{n} p = np ,$$

тобто

$$m_x = np . \qquad (5.5)$$

Дисперсія. Визначимо попередньо дисперсію випадкової величини X_i – числа появ події A в i–му експерименті, $i=\overline{1,n}$, за формулою (4.21):

$$D_{xi} = \alpha_{2i} - m_{xi}^2 = 0^2\cdot(1-p)+1^2\cdot p - p^2 = p - p^2 = p\cdot(1-p) .$$

Дисперсія біноміальної випадкової величини X (сума дисперсій незалежних випадкових величин X_i) визначиться за допомогою наступного перетворення:

$$D_x = D[X] = D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} D[X_i] = \sum_{i=1}^{n} p(1-p) = np(1-p) ,$$

тобто

$$D_x = np(1-p) . \qquad (5.6)$$

Середнє квадратичне відхилення визначимо відповідно до формули (4.23):

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{np(1-p)} . \qquad (5.7)$$

Приклад 5.1. Ймовірність влучення в мішень дорівнює 0,8. Визначити математичне сподівання m_x, дисперсію D_x і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X – числа влучень при 10 пострілах.

Розв'язання. Постріли по мішені – це незалежні експерименти,. Ймовірність влучення в при кожному пострілі однакова і дорівнює 0,8. Отже, випадкова величина ***X*** розподілена по *біноміальному закону* з параметрами ***n***=10 і ***p***=0,8. А це значить, що її математичне сподівання визначається за формулою (5.5):

$$m_x = np = 10 \cdot 0{,}8 = 8\ ;$$

дисперсія – за формулою (5.6):

$$D_x = np(1-p) = 10 \cdot 0{,}8 \cdot (1-0{,}8) = 1{,}6\ ;$$

середнє квадратичне відхилення – за формулою (5.7):

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{1{,}6} \approx 1{,}26\ .$$

5.1.3. Геометричний розподіл

Нехай проводиться ***n*** незалежних експериментів, у кожному з яких з однаковою ймовірністю ***p*** може відбутися деяка подія ***A***. Випробування закінчуються, як тільки подія ***A*** відбулася. Тобто, якщо ***A*** з'явилася у *k*-му випробуванні, то в перших (*k*-1) випробуваннях подія ***A*** не відбулася.

Випадкова величина ***X*** – *номери першого успішного випробування в схемі Бернуллі* набуває значень **1, 2, 3, …, k, …** з ймовірностями

$$P\{X = k\} = (1-p)^{k-1} \cdot p\ .$$

Тоді випадкова величина ***X*** має ***геометричний розподілу*** з параметром ***p*** (що можна записати у вигляді $X \in G_p$) і рядом розподілу (табл. 5.3):

Таблиця 5.3 - Геометричний ряд розподілу

x_i	1	2	3	. . .	k	. . .
p_i	p	$(1-p) \cdot p$	$(1-p)^2 \cdot p$	. . .	$(1-p)^k \cdot p$	. . .

Сума ймовірностей у другому рядку ряду розподілу дорівнює одиниці, тобто

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}\cdot p = p\cdot\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1} = p\cdot\frac{1}{1-(1-p)} = 1,$$

де $\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1} = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p}$ − сума нескінченно спадної геометричної прогресії (звідки й походить назва розподілу).

Знайдемо **числові характеристики випадкової величини.**

Застосовуючи аналогічні викладки, для ***математичне сподівання*** маємо:

$$m_x = M[X] = M\left[\sum_{k=1}^{\infty} X_k\right] = \sum_{k=1}^{\infty} M[X_k] = \sum_{k=1}^{\infty} k\cdot p_k = \sum_{k=1}^{\infty} k\cdot(1-p)^k\cdot p =$$

$$= p\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot(1-p)^k = p\cdot[1+2\cdot(1-p)+\ldots+k\cdot(1-p)^{k-1}+\ldots)]$$

Ряд $S = 1+2\cdot(1-p)+\ldots+k\cdot(1-p)^{k-1}+\ldots$ є похідною ряду $\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^k$, який у свою чергу є сумою нескінченної спадної прогресії зі знаменником $q = 1-p$.

Тоді $\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^k = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}$. Отже, $S = \frac{d}{dq}\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p^2}$, $m_x = p\cdot\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$.

Тобто

$$m_x = \frac{1}{p}. \tag{5.8}$$

Дисперсія.

$D_x = \alpha_2 - m_x^2$;

$$\alpha_2 = M[X^2] = \sum_{k=1}^{\infty} k\cdot(1-p)^k\cdot p = p\cdot[1+4\cdot(1-p)+\ldots+k^2\cdot(1-p)^{k-1}+\ldots)] = p\cdot\frac{1+(1-p)}{[1-(1-p)]^3} = \frac{2-p}{p^2},$$

$$D_x = \frac{2-p}{p^2} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{1-p}{p^2}.$$

Тобто

$$D_x = \frac{1-p}{p^2}. \tag{5.9}$$

Середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \frac{\sqrt{1-p}}{p}. \tag{5.10}$$

Геометричний розподіл широко застосується в економіці і менеджменті.

Приклад 5.2. Для просування свого товару на ринку фірма-виробник проводить ряд рекламних кампаній. Кожна рекламна кампанія займає період часу ***t*** і закінчується успіхом (продажем товару) незалежно від інших з ймовірністю ***p***. Знайти закон розподілу випадкової величини ***X*** – період часу, що витрачається на реалізацію партії товару.

Розв'язання. Випадкова величина ***X*** в даному випадку набуває значень

$$X=\{\, 1t,\ 2t,\ 3t,\ \dots,\ kt,\ \dots\} .$$

Оскільки проведення рекламних кампаній закінчується при продажі товару, а ймовірність продажу однакова для кожної кампанії, то ***X*** розподілена по *геометричному закону* з параметром ***p*** і рядом розподілу:

x_i	t	$2t$	$3t$	...	kt	...
p_i	p	$(1-p)\cdot p$	$(1-p)^2\cdot p$	...	$(1-p)^k\cdot p$	...

Приклад 5.3. Проводиться стрільба по мішені до першого влучення. Ймовірність влучення дорівнює 0,8. Знайти числові характеристики випадкової величини ***X*** − числа проведених пострілів.

Розв'язання. Випадкова величина ***X*** має *геометричний розподіл* з параметром ***p*** =0,8. Знайдемо числові характеристики :

$$m_x = \frac{1}{p} = \frac{1}{0{,}8} = 1{,}25 \ ;$$

$$D_x = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1-0{,}8}{0{,}8^2} = \frac{0{,}2}{0{,}64} = 0{,}31 \ ;$$

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \frac{\sqrt{1-p}}{p} = \frac{\sqrt{1-0{,}8}}{0{,}8} = \frac{\sqrt{0{,}2}}{0{,}8} \approx 0{,}56 \ , \quad \text{або} \quad \sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{0{,}31} \approx 0{,}56 \ .$$

5.1.4. Гіпергеометричний розподіл

Припустимо, що в урні знаходитися **N** куль, серед них **K** − білих і (**N − K**) чорних. Навмання з урни витягли **n** куль. Нехай випадкова величина **X** − *число білих куль серед* ***n*** *куль, що витягли з урни.*

Випадкова величина **X** набуває значень **0, 1, 2, 3, …,** min {***n, K***} з ймовірностями $P\{X = k\} = \dfrac{C_K^k \cdot C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}$.

Тоді випадкова величина **X** має ***гіпергеометричний розподілу*** з параметрами ***n,*** **N** і ***K,*** де $K \le N$, $n \le N$ і рядом розподілу (табл.5.4.):

Таблиця 5.4 - Гіпергеометричний ряд розподілу

x_i	0	1	2	. . .	min {***n, K***}
p_i	$\dfrac{C_K^0 \cdot C_{N-K}^n}{C_N^n}$	$\dfrac{C_K^1 \cdot C_{N-K}^{n-1}}{C_N^n}$	$\dfrac{C_K^2 \cdot C_{N-K}^{n-2}}{C_N^n}$	. . .	$\dfrac{C_K^k \cdot C_{N-K}^{n-\min\{n,k\}}}{C_N^n}$

Знайдемо **числові характеристики випадкової величини.**

Математичне сподівання:

$$m_x = M[X] = \sum_{k=1}^{n} k \cdot p_k = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{C_K^k \cdot C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n} = n \cdot \frac{K}{N}.$$

Тобто

$$m_x = n \cdot \frac{K}{N}. \qquad (5.11)$$

Дисперсія:

$$D_x = n \cdot \frac{(N-n)(N-K)K}{N^2(N-1)} . \qquad (5.12)$$

Середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{\frac{n \cdot (N-n)(N-K)K}{N^2(N-1)}}. \qquad (5.13)$$

Приклад 5.4. **У** партії 10 деталей, серед них 6 стандартних. Навмання вибирають 3 деталі. Скласти закон розподілу випадкової величини $\boldsymbol{X}$ − число стандартних деталей серед відібраних. Визначити числові характеристики випадкової величини.

Розв'язання. Випадкова величина $\boldsymbol{X}$ − число стандартних деталей серед 3 відібраних, має *гіпергеометричний розподіл* з параметрами

$$\boldsymbol{n} = 3,\ \boldsymbol{N} = 10 \text{ і } \boldsymbol{K} = 6.$$

Випадкова величина $\boldsymbol{X}$ набуває значень:0, 1, 2, 3. Знайдемо відповідні ймовірності.

$$P\{X=0\} = \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}; \qquad P\{X=1\} = \frac{C_6^1 \cdot C_4^2}{C_{10}^3} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10};$$

$$P\{X=2\} = \frac{C_6^2 \cdot C_4^1}{C_{10}^3} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}; \qquad P\{X=3\} = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}.$$

Ряд розподілу має вигляд

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

Перевіримо умову нормування $\sum_{i=1}^{4} p_i = \frac{1}{30} + \frac{3}{10} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 1$.

Знайдемо числові характеристики :

$$m_x = n \cdot \frac{K}{N} = 3 \cdot \frac{6}{10} = 1{,}8.$$

$$D_x = n \cdot \frac{(N-n)(N-K)K}{N^2(N-1)} = 3 \cdot \frac{7 \cdot 4}{10^2 \cdot 9} \approx 0{,}093.$$

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{0{,}093} \approx 0{,}31.$$

5.1.5. Закон розподілу Пуассона

Нехай проводиться ***n*** незалежних експериментів, у кожному з яких з однаковою ймовірністю ***p*** може відбутися деяка подія ***A***. Для визначення ймовірності ***k*** успіхів у цих ***n*** випробуваннях використовують формулу Бернуллі. Проте, якщо ***n*** велике, то користуються наближеною формулою Лапласа (3.6). Однак, ця формула дає велику похибку, якщо $p \le 0{,}1$. У цьому випадку застосують формулу Пуассона (3.7).

Оскільки формула Пуассона являється *граничним випадком* біноміального розподілу при великий кількості випробувань ***n*** і малій ймовірності події ***p,*** то закон Пуассона часто називають ***законом рідких подій***.

Випадкова величина ***X*** – *число появ події **A** в серії **n** незалежних випробувань* набуває значень **0,1, …, *n*** з ймовірностями

$$P\{X = k\} = P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \tag{5.14}$$

де $\lambda = np$.

Тоді випадкова величина ***X*** має ***розподіл Пуассона*** з параметром $\lambda > 0$ (що можна записати у вигляді $X \in \Pi_\lambda$) і рядом розподілу (табл.5.5):

Таблиця 5.5 - Ряд розподілу Пуассона

x_i	**0**	**1**	**. . .**	***k***	**. . .**
p_i	$e^{-\lambda}$	$\lambda \cdot e^{-\lambda}$		$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	**. . .**

Сума ймовірностей у другому рядку ряду розподілу дорівнює одиниці, тобто

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot (1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + ... + \frac{\lambda^n}{n!} + ...) = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1,$$

де $1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + ... + \frac{\lambda^n}{n!} + ... = e^{\lambda}$ являє собою функціональний ряд, що сходиться до функції e^{λ}.

Знайдемо **числові характеристики випадкової величини.**

Математичне сподівання визначимо відповідно до формули (4.10) в такий спосіб:

$$m_x = M\left[X\right] = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \cdot p_k \ = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1} \cdot \lambda}{(k-1)!} =$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot (1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + ... + \frac{\lambda^n}{n!} + ...) = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot e^{\lambda} = \lambda \, .$$

Тобто математичне сподівання пуассонівської випадкової величини

$$m_x = \lambda \, . \tag{5.15}$$

Дисперсія. Визначимо попередньо другий початковий момент відповідно до формули (4.19):

$$\alpha_2 = \sum_{k=0}^{\infty} x_k^2 p_k \ = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^{k-1} \cdot \lambda}{k!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \lambda (k-1+1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \left[\sum_{k=1}^{\infty} (k-1+1) \cdot \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \overbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}}^{e^{\lambda}} \right] = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \left[\lambda \overbrace{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}}^{e^{\lambda}} + e^{\lambda} \right] = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot [\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda}] =$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot e^{\lambda} (\lambda + 1) = \lambda \cdot (\lambda + 1).$$

Дисперсію визначимо за формулою (4.21):

$$D_x = \alpha_2 - m_x^2 = \lambda(\lambda + 1) - \lambda^2 = \lambda \, ,$$

тобто

$$D_x = \lambda \, . \tag{5.16}$$

Середнє квадратичне відхилення визначимо відповідно до формули (4.23):

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{\lambda} \, . \tag{5.17}$$

Приклад 5.5. У бібліотеці є 1000 підручників з теорії ймовірностей. Імовірність помилки у відповідях у кожному з них дорівнює 0,0002. Знайти ймовірність того, що в бібліотеці буде:

а) рівно три;

б) не більш двох підручника з неправильними відповідями.

Розв'язання. а) Нехай випадкова величина $\boldsymbol{X}$ − кількість підручника з неправильними відповідями. За умовами задачі $\boldsymbol{n}$ =1000, $\boldsymbol{p}$ = 0,0002, $\boldsymbol{k}$ = 3 .

Оскільки $\boldsymbol{\lambda}$=$\boldsymbol{np}$=1000·0,0002 = **2** , тоді шукана ймовірність за формулою (5.14) дорівнює:

$$P\{X = 3\} = P_{1000}(3) = \frac{\lambda^3}{3!}\cdot e^{-\lambda} = \frac{2^3}{3!}\cdot e^{-2} = \frac{8}{6}\cdot e^{-2} = \frac{4}{3e^2} \approx \frac{4}{3\cdot 7{,}3886} = 0{,}18\,.$$

б)

$$P\{X \le 2\} = P_{1000}(0) + P_{1000}(1) + P_{1000}(2) = \frac{2^0}{0!}\cdot e^{-2} + \frac{2^1}{1!}\cdot e^{-2} + \frac{2^2}{2!}\cdot e^{-2} =$$

$$= \frac{1}{e^2} + \frac{2}{e^2} + \frac{4}{2e^2} = \frac{7}{2e^2} = \frac{7}{e^2} \approx 0{,}474\,.$$

Для пуассонівских випадкових величин існують дві спеціальні таблиці, що дозволяють вирішувати різні задачі, зв'язані з розподілом Пуассона, без обчислення факторіальних величин типу $m!$, степеневих величин типу λ^m і показових величин типу $e^{-\lambda}$.

Перша таблиця дозволяє визначати ймовірність того, що пуассонівська випадкова величина приймає значення m, тобто ймовірність $P\{X=m\}$.

Друга таблиця дозволяє визначати ймовірність того, що пуассонівська випадкова величина приймає значення, яке менше або рівне m, тобто ймовірність $P\{X\le m\}$.

Друга таблиця є більш універсальною, тому що дозволяє легко визначати ймовірності:

$P\{X=m\} = P\{X\le m\} - P\{X\le (m-1)\}$;

$P\{X\ge m\} = 1 - P\{X\le (m-1)\}$;

$P\{m_1\le X\le m_2\} = P\{X\le m_2\} - P\{X\le (m_1-1)\}$.

5.1.6. Найпростіший потік подій

Розглянемо задачі, які приводять до розподілу Пуассона. Нехай розглядаються події, які виникають у випадкові моменти часу $\tau \in (t_1, t_2), \quad 0 \le t_1 < t_2 \le +\infty)$. Тоді випадкова величина X − число події, що розглядаються на інтервалі (t_1, t_2).

Визначення 5.1. ***Випадковим потоком подій*** називаються події, що відбуваються одна за одною у випадкові моменти часу.

Прикладами потоку подій може бути:

− находження заявок на придбання квитків в касі театру;

− находження викликів в системах масового обслуговування;

− відмови елементів у складному технічному пристрої і т.п.

Потоки подій можуть мати ряд властивостей, серед яких позначимо найбільш важливі:

− стаціонарність;

− ординарність;

− відсутність післядії.

Визначення 5.2. Випадковий потік подій називається ***стаціонарним***, якщо ймовірність влучення певного числа подій на заданий інтервал часу залежить тільки від довжини інтервалу T і не залежить від того, де на числовій осі t розташований цей інтервал.

Якщо інтервали часу T_1 і T_2, що знаходяться на числовій осі t у різних місцях (рис.5.1), рівні між собою, то рівні і ймовірності появи визначеного числа подій m протягом цих інтервалів $P_1\{X=m\}$ і $P_2\{X=m\}$:

$$T_1 = T_2 \quad \Rightarrow \quad P_1\{X=m\} = P_2\{X=m\}.$$

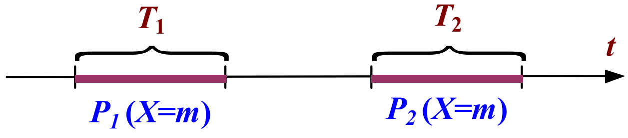


Рис.5.1.

Визначення 5.3. Випадковий потік подій називається ***ординарним***, якщо ймовірність влучення двох і більше подій на нескінченно малий інтервал часу Δt занадто мала в порівнянні з ймовірністю влучення однієї події в цей інтервал.

Іншими словами, дві і більш події на одному нескінченно малому інтервалі часу відбутися не можуть, тобто має місце ліміт $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{P\{X > 1\}}{P(X = 1)} = 0$.

Визначення 5.4. Випадковий потік подій називається потоком ***без післядії***, якщо ймовірність влучення певного числа подій на інтервал часу довжиною T не залежить від того, скільки подій потрапило на будь-який інший інтервал, що не перетинається з першим.

Ця властивість потоку говорить про те, що всі наступні події в потоці не залежать від попередніх.

Визначення 5.5. ***Найпростішим (пуассонівским) потоком подій*** називається потік подій, що має властивості ***стаціонарності***; ***ординарності*** і ***відсутності післядії***.

Визначення 5.6. ***Інтенсивністю потоку λ*** називають середнє число подій, які з'являються в одиницю часу.

Згідно властивості стаціонарності, це величина постійна.

Тоді, для найпростішого потоку подій випадкова величина $\boldsymbol{X}$ – *кількість подій, що потрапили на інтервал T* набуває значень **0,1, …, *n*** з ймовірностями

$$P\{X = m\} = P_m(T) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \tag{5.18}$$

де $a = \lambda T$ – середнє число подій, що потрапляють на інтервал T;

λ – інтенсивність настання подій (кількість подій в одиницю часу);

T – певний період часу.

Отже, випадкова величина $\boldsymbol{X}$ має ***розподіл Пуассона*** з параметром $\boldsymbol{a} > 0$ і рядом розподілу (табл.5.6):

Таблиця 5.6 - Ряд розподілу пуассонівского потоку подій.

x_i	0	1	...	k	...
p_i	e^{-a}	$a \cdot e^{-a}$		$\dfrac{a^k}{k!} e^{-a}$	...

Формула (5.17) є ***математичною моделлю*** найпростішого (пуассонівського) потоку подій.

Доведення. Доведемо, що випадкова величина $\boldsymbol{X}$ має ***розподіл Пуассона,*** тобто виконується формула (5.17).

Розіб'ємо інтервал часу довжиною $\boldsymbol{T}$ на ділянки $\boldsymbol{\Delta t}$ у кількості $\boldsymbol{n}$. Причому $\Delta t = \frac{T}{n} \to 0$. З погляду на стаціонарність та ординарність потоку ймовірність того, що на ділянці Δt відбудеться одна подія, визначиться в такий спосіб:

$$p = \lambda \Delta t = \frac{\lambda T}{n},$$

а ймовірність того, що на ділянці Δt не відбудеться жодної події:

$$q = 1 - p = 1 - \lambda \Delta t = 1 - \frac{\lambda T}{n}.$$

За умови $n \to \infty$ ймовірність $p = \frac{\lambda T}{n} \to 0$. Ймовірність того, що за період часу T відбудеться рівно m подій можна розглядати як ймовірність появи m подій в n незалежних випробуваннях при $n \to \infty$ i $p \to 0$, тобто обчислювати її за формулою Бернуллі:

$$P\{X = m\} = \lim_{n \to \infty} C_n^m p^m (1-p)^{n-m} = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{\overbrace{n(n-1)...(n-m+1)}^{m}}{m!} \cdot p^m (1-p)^{n-m} \right] =$$

$$= \frac{n^m}{m!} \cdot p^m \lim_{n\to\infty} \frac{(1-p)^n}{(1-p)^m} = \frac{(np)^m}{m!} \cdot \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{np}{n}\right)^n}{1^m} = \frac{a^m}{m!} \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{a}{n}\right)^n .$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{a}{n}\right)^n = e^{-a}$ є *другим чудовим лімітом*, то $P\{X = m\} = \frac{(a)^m}{m!} .e^{-a}$, що і було потрібно довести.

Знайдемо **числові характеристики випадкової величини.**

Математичне сподівання відповідно до формули (5.15) має вигляд:

$$m_x = a . \qquad (5.19)$$

Дисперсія відповідно до формули (5.16) має вигляд:

$$D_x = a . \qquad (5.20)$$

Середнє квадратичне відхилення відповідно до формули (5.17) має вигляд:

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{a} . \qquad (5.21)$$

Приклад 5.6. Середня інтенсивність продажу квитків в касі дорівнює 5 квитків в годину. Знайти ймовірність того, що за 2 години буде продано:

а) 8 квитків**;**

б) не менше 8 квитків.

Розв'язання. За умовою задачі маємо найпростіший потік подій, де випадкова величина ***X*** – число придбаних квитків, має ***розподіл Пуассона*** з параметром ***a***= λT – середнє число подій, що потрапляють на інтервал *T*;

λ=5 квитків – інтенсивність настання подій;

T=2 години – певний період часу.

a= λT=5·2=**10** .

а) $P\{X=8\}=\frac{a^m}{m!}e^{-a}=\frac{10^8}{8!}e^{-10}\approx 0{,}1126$;

б) $P\{X\ge 8\}=\sum_{m=8}^{\infty}\frac{a^m}{m!}e^{-a}=\sum_{m=8}^{\infty}\frac{10^m}{m!}e^{-10}=1-P\{X<8\}=1-\sum_{m=0}^{7}\frac{10^m}{m!}e^{-10}=$

$$=1-e^{-10}\sum_{m=0}^{7}\frac{10^m}{m!}=1-e^{-10}(1+\frac{10^1}{1!}+\frac{10^2}{2!}+...+\frac{10^7}{7!})=1-e^{-10}\cdot 4850{,}683\approx 0{,}7798.$$

Приклад 5.7. Потік заявок, що поступають на телефонну станцію, являє собою найпростіший потік подій. Математичне сподівання числа викликів за годину дорівнює 30. Знайти ймовірність того, що за хвилину надійде не менше двох викликів.

Розв'язання. За умовою задачі математичне сподівання кількості викликів за годину $m_x = 30$, тоді математичне сподівання кількості викликів за хвилину $m_x = 30/60 = 0{,}5$.

Тобто $\boldsymbol{a} = m_x = 0{,}5$.

$$P\{X\ge 2\}=\sum_{m=2}^{\infty}\frac{a^m}{m!}e^{-a}=\sum_{m=2}^{\infty}\frac{0{,}5^m}{m!}e^{-0{,}5}=1-P\{X<2\}=1-\sum_{m=0}^{1}\frac{0{,}5^m}{m!}e^{-0{,}5}=$$

$$=1-e^{-0{,}5}\sum_{m=0}^{1}\frac{0{,}5^m}{m!}=1-e^{-0{,}5}(1+\frac{0{,}5}{1!})=1-e^{-0{,}5}\cdot 1{,}5\approx 0{,}0902 .$$

5.2. Закони розподілу неперервних випадкових величин

Розподіли випадкових величин далеко не вичерпуються дискретними розподілами. Так, наприклад, якщо точка кидається наугад на відрізок [0,1], то можна задати випадкову величину, рівну координаті цієї точки. Але кількість значень цієї випадкової величини незліченна, так що її розподіл дискретним не є. Та і ймовірність цій випадковій величині прийняти кожне зі своїх можливих значень (попасти в точку відрізка) дорівнює нулю. Отже в цьому випадку ми маємо неперервну випадкову величину.

Серед законів розподілу неперервних випадкових величин особливої уваги заслуговують:

1. рівномірний;
2. показовий;
3. нормальний.

5.2.1. Рівномірний (прямокутний) закон розподілу

Визначення 5.7. Неперервна випадкова величина розподілена за ***рівномірним законом*** на інтервалі $[a, b]$, якщо її щільність розподілу має вигляд:

$$f(x)=\begin{cases}0\,, & x\notin[a,b];\\ c\,, & x\in[a,b].\end{cases} \tag{5.22}$$

Тобто щільність розподілу зберігає постійне значення на інтервалі $[a, b]$.

Цей розподіл є неперервним аналогом класичного визначення ймовірності.

Знайдемо постійну величину ***c.*** Для цього необхідно за допомогою першої властивості щільності розподілу взяти визначений інтеграл у нескінченних границях від щільності розподілу (5.22) і дорівняти його одиниці:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{a}0\;dx+\int_{a}^{b}c\;dx+\int_{b}^{\infty}0\;dx=0+cx\Big|_a^b+0=c(b-a);$$

$$c(b-a)=1. \qquad \text{Звідси} \qquad c=\frac{1}{b-a}.$$

Тоді остаточно щільність рівномірного розподілу має вигляд:

$$f(x)=\begin{cases}0\,, & x\notin[a,b];\\ \dfrac{1}{b-a}\,, & x\in[a,b].\end{cases} \tag{5.22}$$

Таким чином, випадкова величина ***X*** має ***рівномірний розподіл*** з параметрами ***a*** *і* ***b,*** що можна записати у вигляді $X\in R_{a,b}$.

Графік щільності розподілу для рівномірно розподіленої випадкової величини має вигляд, показаний на рис.5.2.

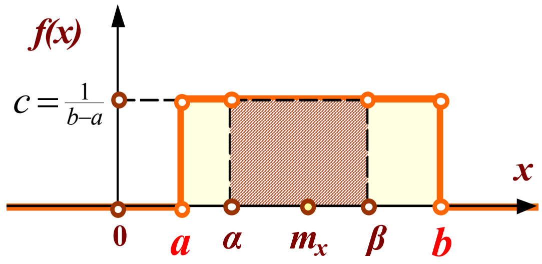


Рис. 5.2

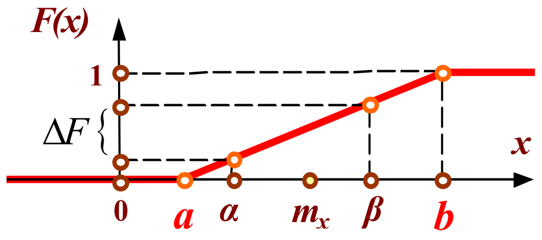


Рис. 5.3

Знайдемо інтегральна функція розподілу, відповідно до формули (4.6)

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt\,.$$

Отримуємо

$$F(x)=\begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{x} 0\cdot dt=0\,, & x<a\,;\\ \int\limits_{-\infty}^{a} 0\cdot dt+\int\limits_{a}^{x}\frac{1}{b-a}\cdot dt=\frac{x-a}{b-a}\,, & a\le x\le b\,;\\ \int\limits_{-\infty}^{a} 0\cdot dt+\int\limits_{a}^{b}\frac{1}{b-a}\cdot dt+\int\limits_{b}^{x}0\cdot dt=\frac{b-a}{b-a}=1\,, & x>b\,. \end{cases}$$

Таким чином, інтегральна функція рівномірно розподіленої величини визначається як

$$F(x)=\begin{cases} 0\,, & x<a\,;\\ \frac{x-a}{b-a}\,, & a\le x\le b\,;\\ 1\,, & x>b\,. \end{cases} \qquad (5.22)$$

Графік інтегральної функції для рівномірно розподіленої випадкової величини має вигляд, показаний на рис.5.3.

Знайдемо **числові характеристики** неперервної випадкової величини**.**

Математичне сподівання неперервної випадкової величини відповідно до формули (4.11) визначиться в такий спосіб:

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x) dx = \int_{-\infty}^{a} x \cdot 0 \cdot dx + \int_{a}^{b} x \frac{1}{b-a} \cdot dx + \int_{b}^{\infty} x \cdot 0 \cdot dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2}\Bigg|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2},$$

тобто

$$m_x = \frac{a+b}{2} \quad . \tag{5.23}$$

Таким чином, математичне сподівання рівномірно розподіленої випадкової величини знаходиться в середині відрізка [*a, b*] (див. рис.5.2). Щільність розподілу має осьову симетрію з віссю, що проходить через точку m_x паралельно осі ординат.

Дисперсія. Визначимо попередньо другий початковий момент відповідно до формули (4.14):

$$\alpha_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{a} x^2 0 \cdot dx + \int_{a}^{b} x^2 \frac{1}{b-a} dx + \int_{b}^{\infty} x^2 0 \cdot dx = \frac{x^3}{3(b-a)}\Bigg|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3},$$

тобто

$$\alpha_2 = \frac{a^2 + ab + b^3}{3} \quad . \tag{5.24}$$

За формулою (4.21) отримуємо:

$$D_x = \alpha_2 - m_x^2 = \frac{a^2 + ab + b^3}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12},$$

тобто

$$D_x = \frac{(b-a)^2}{12} \quad . \tag{5.25}$$

Середнє квадратичне відхилення визначимо відповідно до формули (4.23):

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \frac{(b-a)\sqrt{3}}{6}. \tag{5.26}$$

Зауважимо, що дисперсія рівномірно розподіленої випадкової величини залежить лише від довжини інтервалу розподілу і є зростаючою функцією від довжини цього інтервалу.

Знайдемо ймовірність влучення випадкової величини в заданий діапазон.

Ймовірність влучення рівномірно розподіленої випадкової величини в заданий діапазон $P\{\alpha \le X \le \beta\}$, якщо діапазон $[\alpha, \beta]$ входить у діапазон $[a, b]$, можна визначити двома способами:

1 спосіб. За формулою (4.3)

$$P\{\alpha \le X \le \beta\} = F(\beta) - F(\alpha) = \frac{\beta - a}{b - a} - \frac{\alpha - a}{b - a} = \frac{\beta - \alpha}{b - a} \ .$$

2 спосіб. За формулою (4.9)

$$P\{\alpha \le X \le \beta\} = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{b-a} dx = \left. \frac{x}{b-a} \right|_{\alpha}^{\beta} = \frac{\beta - \alpha}{b - a} \ .$$

Таким чином,

$$[\alpha, \beta] \subset [a, b] \quad \Rightarrow \quad P\{\alpha \le X \le \beta\} = \frac{\beta - \alpha}{b - a} . \tag{5.27}$$

З геометричної точки зору ймовірності $P\{\alpha \le X \le \beta\}$ відповідає площа яка виділена штрихуванням на рис.5.2.

Якщо діапазон $[\alpha, \beta]$ не входить до діапазону $[a, b]$, то вираз (5.27) не є справедливим. У цьому випадку необхідно керуватися виразом

$$[\alpha, \beta] \not\subset [a, b] \quad \Rightarrow \quad P\{\alpha \le X \le \beta\} = \frac{(\beta - \alpha) \cap (b - a)}{b - a} , \tag{5.28}$$

де $(\beta - \alpha) \cap (b - a)$ – довжина діапазону на числовій осі, що є перерізом інтервалів $[\alpha, \beta]$ і $[a, b]$.

Приклад 5.8. Випадкова величина $\boldsymbol{X}$ рівномірно розподілена на інтервалі [3,8]. Знайти $P\{6 \le \boldsymbol{X} \le 7\}$.

Розв'язання. За формулою (5.27) , так як $[6,7] \subset [3,8] \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad P\{\alpha \le X \le \beta\} = \frac{\beta-\alpha}{b-a}. \quad \text{Отже,} \quad P\{6 \le X \le 7\} = \frac{7-6}{8+3} = \frac{1}{5}.$$

Приклад 5.9. . Електропоїзди в метро слідують один за одним суворо за графіком з інтервалом руху 5 хвилин. Знайти ймовірність того, що пасажир, що підійшов до перону метро, буде очікувати черговий потяг менше 3 хвилин.

Розв'язання. Час очікування є випадковою величиною, рівномірно розподіленою в інтервалі $[0, 5]$.

Тоді $P\{0 \le X \le 3\} = \dfrac{3-0}{5-0} = \dfrac{3}{5}$.

5.2.2. Показниковий (експоненціальний) закон розподілу

У *найпростішому потоці подій* випадкова величина T – інтервал часу між двома послідовними подіями – розподілена за *показниковим законом*.

Визначення 5.8. Неперервна випадкова величина розподілена за ***показниковим законом***, якщо її щільність розподілу має вигляд:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ \lambda\, e^{-\lambda t}, & t \ge 0, \end{cases} \tag{5.29}$$

де λ – інтенсивність подій, тобто кількість подій в одиницю часу.

Графік щільності розподілу для випадкової величини, розподіленої за показниковим законом, має вигляд, показаний на рис. 5.4.

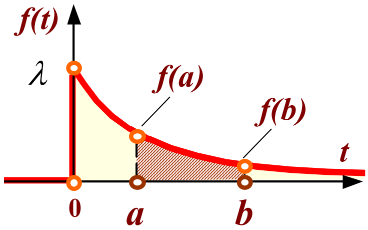


Рис. 5.4

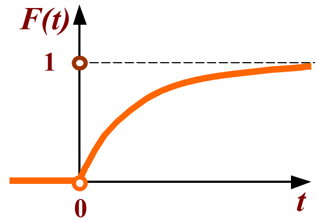


Рис. 5.5

Показниковий закон розподілу має тільки один параметр $\boldsymbol{\lambda}$.

Таким чином, якщо випадкова величина ***X*** має ***показниковий закон розподілу*** з параметром $\lambda > 0$, це що можна записати у вигляді $X \in E_{\lambda}$.

Показниковий розподіл є неперервним аналогом дискретного геометричного розподілу.

Знайдемо інтегральна функція розподілу, відповідно до формули (4.6) :

$$F(t) = \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{t} 0 \cdot dx = 0, & t < 0; \\ \int\limits_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int\limits_{0}^{t} \lambda\, e^{-\lambda x} dx = \lambda \int\limits_{0}^{t} e^{-\lambda x} dx = \lambda \left(-\frac{1}{\lambda} \right) e^{-\lambda x} \Big|_{0}^{t} = -e^{-\lambda t} + 1 = 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0. \end{cases}$$

Отже,

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0. \end{cases} \qquad (5.30)$$

Графік інтегральної функції (5.30) зображений на рис. 5.5.

Знайдемо **числові характеристики** неперервної випадкової величини**.**

Математичне сподівання випадкової величини, розподіленої за показниковим законом, визначимо наступним чином:

$$m_t = \int\limits_{-\infty}^{\infty} t\, f(t) dx = \int\limits_{-\infty}^{0} t \cdot 0 \cdot dx + \int\limits_{0}^{\infty} t \lambda e^{-\lambda t} dt = \int\limits_{0}^{\infty} t \lambda e^{-\lambda t} dt .$$

Отриманий інтеграл інтегруємо частинами.

Формула інтегрування частинами для визначеного інтеграла має вигляд:

$$\int\limits_{a}^{b} u dv = \left(uv \right)\Big|_{a}^{b} - \int\limits_{a}^{b} v du .$$

Отже, позначимо: $u = -t, \quad dv = -\lambda\, e^{-\lambda t} dt$,

тоді $du = -dt, \quad v = e^{-\lambda t}$.

Інтегруємо частинами:

$$\int_0^\infty t\lambda e^{-\lambda t}dt=\Big[\underbrace{-t}_{u}\cdot\underbrace{e^{-\lambda t}}_{v}\Big]_0^\infty-\left(\underbrace{-\int_0^\infty \underbrace{e^{-\lambda t}}_{v}dt}_{\int_a^b v\,du}\right)=\underbrace{\lim_{t\to\infty}\frac{-t}{e^{\lambda t}}}_{0}-\underbrace{\lim_{t\to 0}\left(-te^{-\lambda t}\right)}_{0}-\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\Bigg|_0^\infty=\underbrace{-\lim_{t\to\infty}\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}}_{0}+\underbrace{\lim_{t\to 0}\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}}_{\frac{1}{\lambda}}=\frac{1}{\lambda},$$

тобто

$$m_x=\frac{1}{\lambda}\ . \tag{5.31}$$

Примітка. Обчислення ліміту $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{-t}{e^{-\lambda t}}$ здійснюється за правилом Лопіталя.

Дисперсія. Визначимо попередньо другий початковий момент відповідно до формули (4.14):

$$\alpha_2=\int_{-\infty}^{\infty}t^2\,f(t)dx=\int_{-\infty}^{0}t^2\cdot 0\cdot dx+\int_0^\infty t^2\lambda e^{-\lambda t}dt\ =\int_0^\infty t^2\lambda e^{-\lambda t}dt\ .$$

Отриманий інтеграл інтегруємо частинами.

Позначимо: $u=t^2,\quad dv=\lambda\, e^{-\lambda t}dt,$

тоді $du=2tdt,\quad v=-e^{-\lambda t}.$

Інтегруємо частинами:

$$\alpha_2=\int_0^\infty t^2\lambda e^{-\lambda t}dt=\underbrace{\Big[\underbrace{-t^2e^{-\lambda t}}_{uv}\Big]_0^\infty}_{0}-\left(\underbrace{-2\int_0^\infty t\,e^{-\lambda t}dt}_{\int_a^b v\,du}\right)=\frac{2}{\lambda}\underbrace{\int_0^\infty t\lambda e^{-\lambda t}}_{m_t=\frac{1}{\lambda}}=\frac{2}{\lambda^2}.$$

$$D_t=\alpha_2-m_t^2=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2},$$

тобто

$$D_t=\frac{1}{\lambda^2}\,. \tag{5.32}$$

Середнє квадратичне відхилення визначимо відповідно до формули (4.23):

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}} = \frac{1}{\lambda}. \qquad (5.33)$$

Знайдемо ймовірність влучення випадкової величини в заданий діапазон.

Ймовірність влучення показниково розподіленої випадкової величини в заданий діапазон $P\{a \le T \le b\}$, якщо діапазон $[a,b]$ входить у діапазон $[0,\infty]$, можна визначити двома способами:

1 спосіб. За формулою (4.3)

$$P\{a \le T \le b\} = F(b) - F(a) = \left(1 - e^{-\lambda b}\right) - \left(1 - e^{-\lambda a}\right) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

2 спосіб. За формулою (4.9)

$$P\{a \le T \le b\} = \int_a^b \lambda e^{-\lambda t} dt = -e^{-\lambda t}\Big|_a^b = -\left(e^{-\lambda b} - e^{-\lambda a}\right) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

Таким чином,

$$P\{a \le T \le b\} = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}. \qquad (5.34)$$

З геометричної точки зору ймовірності $P\{a \le T \le b\}$ відповідає площа, виділена штрихуванням на рис. 5.4.

Показниковий розподіл характеризує час роботи приладу. Нехай ***T***− неперервна випадкова величина, яка позначає час безвідмовної роботи приладу.

Тоді $\quad P\{T \le t\} = F(x) = 1 - e^{-\lambda t}$.

Функцией надежности называют функцию, определяющую вероятность безотказной работы элемента в течении времени

Визначення 5.9. ***Функцією надійності*** $R_T(t)$ називають функцію, що визначає ймовірність безвідмовної роботи елементу за час ***t*** **.**

$$R_T(t) = P\{T \ge t\} = 1 - P\{T < t\}. \qquad (5.35)$$

Якщо час безвідмовної роботи приладу $\boldsymbol{T}$ має показниковий розподіл, то функція надійності $R_T(t)$ набуває вигляду:

$$R_T(t) = P\{T \geq t\} = 1 - P\{T < t\} = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}.$$

Визначення 5.10. ***Показниковий законом надійності*** називається функцією надійності $R_T(t)$, яка визначається рівністю

$$R_T(t) = e^{-\lambda t}, \tag{5.36}$$

де λ − інтенсивність відмов, тобто кількість відмов в одиницю часу.

Приклад 5.10. Час безвідмовної роботи елемента розподілений за показовім законом:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 0{,}02\, e^{-0{,}02t}, & t \geq 0. \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що елемент безвідмовно працюватиме 100 годин.

Розв'язання. За формулою (5.35) маємо:

$$P\{T \geq 100\} = e^{-\lambda t} = e^{-0{,}02 \cdot 100} = e^{-2} = 0{,}135.$$

Приклад 5.11. Випадкова величина $\boldsymbol{X}$ має показниковий розподіл з параметром $\boldsymbol{\lambda} = 1{,}5$. Знайти ймовірність того, що $\boldsymbol{X}$ набуде значення з інтервалу (1; 3).

Розв'язання. За умовами задачі щільність розподілу має вигляд

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1{,}5\, e^{-1{,}5t}, & t \geq 0. \end{cases}$$

Тоді

$$P\{0 < X < 3\} = \int_0^3 1{,}5 e^{-1{,}5} dt = -e^{-1{,}5t}\Big|_0^3 = e^{-1{,}5} - e^{-4{,}5} \approx 0{,}2120.$$

5.2.3. Нормальний закон розподілу

Нормальний закон розподілу найчастіше зустрічається на практиці при застосуваннях теорії ймовірностей, так як він є граничним для багатьох інших розподілів при виконанні деяких умов. Так нормальний закон досить точно відображує випадкові похибки вимірювань.

Визначення 5.11. Неперервна випадкова величина розподілена за ***нормальним законом*** з параметрами $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{\sigma^2}$, якщо її щільність розподілу має вигляд:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \tag{5.37}$$

Нормальний розподіл, інакше має назву ***Гауссів розподіл*** на ім'я Карла Гаусса. Так як він грає виключно важливу роль в теорії ймовірності, тому ми дуже детально вивчимо властивості цього розподілу.

Графік функції щільності нормального розподілу називають ***нормальній кривій*** (кривій Гаусса).

Графік щільності розподілу для випадкової величини, розподіленої за нормальним законом, має вигляд, показаний на рис.5.6. Крива щільності розподілу симетрична відносно прямої $x = a$. Свого максимуму вона досягає в точці з координатами $\left(a,\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$. При $x = a \pm \sigma$ крива має дві точки перегину.

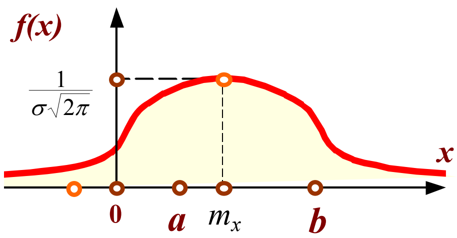


Рис. 5.6

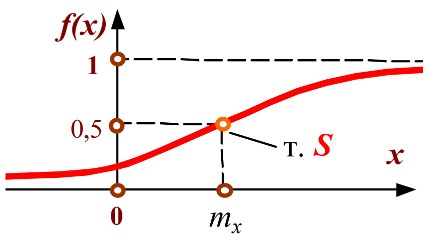


Рис. 5.7

Якщо випадкова величина $\boldsymbol{X}$ має ***нормальним законом*** з параметрами $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{\sigma}$, це можна записати у вигляді $X \in N_{a,\sigma^2}$.

Параметр $\boldsymbol{a}$ називають *центром* нормального розподілу. Він характеризує зміщення кривої розподілу вздовж осі О*x*. Параметр $\boldsymbol{\sigma}$ $(\sigma > 0)$, називається *стандартним відхиленням* і характеризує розсіювання випадкової величини відносно її математичного сподівання. Зі зменшенням $\boldsymbol{\sigma}$ крива розподілу витягується вверх вздовж прямої $x = a$, зберігаючи площу під кривої.

Інтегральна функція розподілу має вигляд:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt \ .$$

Таким чином, інтегральна функція випадкової величини, розподіленої за нормальним законом, визначається інтегралом

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt \ . \tag{5.38}$$

Графік інтегральної функції зображений на рис.5.7. Крива інтегральної функції має центральну симетрію відносно точки $\boldsymbol{S}$.

Знайдемо **числові характеристики** неперервної випадкової величини**.**

Математичне сподівання випадкової величини, розподіленої за нормальним законом з параметрами $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{\sigma^2}$, визначається виразом

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = a \ .$$

$$m_x = a \ . \tag{5.39}$$

Дисперсія. Дисперсія випадкової величини, розподіленої за нормальним законом з параметрами $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{\sigma^2}$, визначається виразом

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma^2 \ .$$

$$D_x = \sigma^2 \ . \tag{5.40}$$

Середнє квадратичне відхилення визначається відповідно до формули (4.23):

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sigma . \qquad (5.41)$$

Центральні моменти. Центральні моменти будь-якого порядку нормально розподіленої випадкової величини з параметрами ***a*** і $\boldsymbol{\sigma^2}$ визначається рекурентним співвідношенням

$$\mu_s = (s-1)\mu_{s-2}\sigma^2 . \qquad (5.42)$$

Знаючи 1-й і 2-й центральні моменти, можна легко знайти будь-який інший.

$$\mu_1 = M\left[(X - m_x)^1\right] = \int_{-\infty}^{\infty}(x - m_x)f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx - \int_{-\infty}^{\infty} m_x f(x)dx = m_x - m_x \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx}_{1} = 0 .$$

Оскільки 1-й центральний момент для усіх випадкових величин дорівнює нулю, то всі непарні центральні моменти для нормально розподіленої випадкової величини також рівні нулю. Отже і *коефіцієнт асиметрії* також дорівнює нулю:

$$S = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{0}{\sigma^3} = 0 .$$

Оскільки 2-й центральний момент

$$\mu_2 = D_x = \sigma^2 ,$$

то всі парні центральні моменти нормально розподіленої випадкової величини легко визначаються за допомогою виразу (5.41):

$$\mu_4 = (4-1)\,\mu_2\;\sigma^2 = 3\cdot\sigma^2\cdot\sigma^2 = 3\sigma^4 ;$$
$$\mu_6 = (4-1)\,\mu_4\;\sigma^2 = 5\cdot 3\sigma^2\cdot\sigma^2 = 15\sigma^4 ;$$
$$\mu_8 = (4-1)\,\mu_6\;\sigma^2 = 7\cdot 15\sigma^2\cdot\sigma^2 = 105\sigma^4 ;$$
$$\ldots$$

Коефіцієнт гостровершинності (величина ексцес) для нормально розподіленої випадкової величини також дорівнює нулю:

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{3\sigma^4}{\sigma^4} - 3 = 0 .$$

Знайдемо ймовірність влучення випадкової величини в заданий діапазон.

Ймовірність влучення нормально розподіленої випадкової величини в заданий діапазон $P\{c \le X \le d\}$ можна одержати за відомими формулами:

$$P\{c \le X \le d\} = \begin{cases} F(d) - F(c); \\ \int\limits_c^d f(x)dx . \end{cases}$$

Однак у цьому випадку інтегрування треба проводити чисельними методами. Щоб уникнути значних труднощів, використовують інтегральну функцію нормально розподіленої випадкової величини з параметрами: $\boldsymbol{a} = 0$; $\boldsymbol{\sigma} = 1$, тобто $(X \in N_{0,1})$:

$$F^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt . \qquad (5.43)$$

Розподіл (5.41) називають *стандартним нормальним розподілом.*

Інтегральна функція $F(x)$ нормально розподіленої випадкової величини $X \in N_{a,\sigma^2}$ пов'язана зі стандартною інтегральною функцією співвідношенням

$$F(x) = F^*\left(\frac{x - m}{\sigma}\right). \qquad (5.44)$$

Тоді ймовірність влучення випадкової величини в заданий діапазон

$$P\{c \le X \le d\} = F^*\left(\frac{d - m}{\sigma}\right) - F^*\left(\frac{c - m}{\sigma}\right). \qquad (5.45)$$

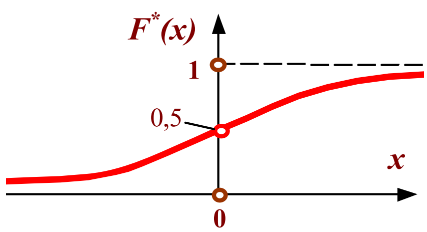


Рис. 5.8

На рис.5.8 зображена інтегральна функція ***стандартного нормального*** розподілу.

Розглянемо $F^{*}(x)$ від аргументу $x > 0$

$$F^{*}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}e^{-\frac{t^2}{2}}dt}_{0,5}+\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt}_{\Phi(x)}=0{,}5+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\Phi(x)+0{,}5,$$

де $\Phi(x)$ – функція Лапласа.

Оскільки $F^{*}(x)=\Phi(x)+0{,}5$, то (5.45) приймає вигляд

$$P\{c\le X\le d\}=F^{*}\left(\frac{d-a}{\sigma}\right)-F^{*}\left(\frac{c-a}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{d-a}{\sigma}\right)+0{,}5-\Phi\left(\frac{c-a}{\sigma}\right)-0{,}5,$$

тобто

$$P\{c\le X\le d\}=\Phi\left(\frac{d-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{c-a}{\sigma}\right). \tag{5.46}$$

Формула (5.46) дозволяє визначати ***ймовірність влучення*** на заданий інтервал нормально розподіленої випадкової величини $X\in N_{a,\sigma^2}$.

Однак, формула (5.46) може бути використана для обчислення ймовірності того, що відхилення випадкової величини $X\in N_{a,\sigma^2}$, від її центру (математичного сподівання) за абсолютним значенням менше заданого числа δ.

Тобто $P(|X-a|<\delta)=?$.

Проведемо перетворення за допомогою формули (5.44)

$$P(|X-a|<\delta)=P(a-\delta<X<a+\delta)=\Phi\left[\frac{(a+\delta)-a}{\sigma}\right]-\Phi\left[\frac{(a-\delta)-a}{\sigma}\right]=$$

$$=\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)+\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right),$$

тобто ймовірність модуля відхилення випадкової величини, розподіленої за нормальним законом з параметрами $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{\sigma^2}$ від її центру, можна обчислити за формулою:

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \qquad (5.47)$$

Якщо δ=·*t*σ, то формула (5.47) набуває вигляду:

$$P\big(|X-a|<t\sigma\big)=2\Phi(t). \qquad (5.48)$$

Якщо *t*=3 і, отже, ·*t* σ= 3σ, то

$$P\big(|X-a|<3\sigma\big)=2\Phi(3)=0{,}9973.$$

Тобто ймовірність попадання у проміжок $[a-3\sigma;\ a+3\sigma]$ дорівнює 0,9973. Таким чином ймовірність протилежної події $X\notin[a-3\sigma;\ a+3\sigma]$, що полягає в тому, що абсолютне відхилення перевищить потроєне σ, дуже мала, а саме дорівнює 0,0027.

Тобто, $1-P\{|X-a|<3\sigma\}=1-2\Phi(3)=0{,}0027$.

У цьому і полягає знамените ***правило трьох сигм.***

Сенсу в запам'ятовуванні числа 0,0027 немає жодного, а ось пам'ятати, що майже вся маса нормального розподілу зосереджена у проміжку $[a-3\sigma;\ a+3\sigma]$, завжди корисно.

Правило трьох сигм. Якщо випадкова величина розподілена нормально $X\in N_{a,\sigma^2}$, то абсолютна величина її відхилення від свого центу не перевершує потроєного середньоквадратичного відхилення.

Приклад 5.12. Відхилення розміру деталі від стандартного розподілено за законом $X\in N_{(0,16\,мм^2)}$. Деталь вважається придатною, якщо відхилення від стандарту не перевищує 6 мм. Який відсоток випуску непридатних деталей?

Розв'язання. Нехай випадкова величина $\boldsymbol{X}$ − відхилення розміру деталі від номінального. Знайдемо ймовірність того, що деталь буде забраковано

$$P\{|X|>6\}=1-P\{|X|\le 6\}=1-\left[\Phi\left(\frac{6}{4}\right)-\Phi\left(-\frac{6}{4}\right)\right]=1-2\Phi\left(\frac{3}{2}\right)=1-2\cdot 0{,}4332=0{,}134\ .$$

Таким чином, брак складає майже 13,4%.

Приклад 5.13. Випадкова величина ***X*** розподілена за нормальним законом $X \in N_{20,25}$. Знайти ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина ***X*** прийме значення з інтервалу (10; 25).

Розв'язання. За умовами задачі маємо параметри розподілу ***a = 20;*** $\boldsymbol{\sigma^2}$ ***= 25.***

Таким чином, математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини ***X*** дорівнюють

$m_x = a = 20$; $D_x = \sigma^2 = 25$; $\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sigma = 5$.

За формулою (5.46) маємо

$$P\{10 < X < 25\} = \Phi\left(\frac{d-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{c-a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{25-20}{5}\right) - \Phi\left(\frac{10-20}{5}\right) = \Phi(1) - \Phi(-2) =$$

$$= \Phi(1) + \Phi(2) \approx 0{,}3413 + 0{,}4772 = 0{,}8185.$$

5.3. Розподіли, пов'язані з нормальним розподілом

Розглянемо декілька розподілів, що зв'язані з нормальним розподілом і використовуються як інструмент для розв'язання багатьох задач математичної статистики.

5.3.1. Розподіл Пірсона

Розподіл Пірсона має ще іншу назву – ***розподіл*** χ^2 (***хі-квадрат).***

Нехай незалежні випадкові величини $\boldsymbol{X_i}$ (i=1,2,…n) розподілені за стандартним нормальним законом з параметрами ***a*** = 0 і $\boldsymbol{\sigma^2}$ = 1, тобто $X \in N_{0,1}$. Тоді випадкова величина

$$\chi_k{}^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \tag{5.49}$$

розподілена за законом χ^2 (***хі-квадрат)*** з *k ступенями свободи,* *k*= ***n***. Число ступенів свободи *k* є абстрактним поняттям, що визначає в даному випадку умови незалежності величин X_i . Наявність будь-якої залежності між величинами X_i зменшує число ступенів свободи k на одиницю $k= n-1$.

Щільність ймовірності випадкової величини $\chi_k{}^2$ задається співвідношенням

$$f_{\chi_k^2}(x) = K_n \cdot x^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \qquad (x > 0),$$

де стала K_n визначається умовою нормування.

Зокрема, при n=1 , тобто $\chi_1{}^2 = X_1^2$ ми маємо нормальний розподіл с параметрами $N(0, 1)$; а при n=2 отримуємо показниковий розподіл с параметром $\lambda = \frac{1}{2}$.

Числові характеристики розподілу $\chi_k{}^2$: $m_x = k$; $D_x = 2k$.

Зі зростанням числа ступенів свободи k розподіл $\chi_k{}^2$ (хі-квадрат) наближається до нормального розподілу. При великих k цей розподіл можна досить точно апроксимувати нормальним розподілом з параметрами $N(k, \sqrt{2k})$.

Для розподілу $\chi_k{}^2$ (хі-квадрат) складено таблицю ймовірності того, що величина χ^2 виявиться більшою за фіксоване значення $\chi_1{}^2$, тобто ймовірності $P\{\chi^2 > \chi_1^2\} = \beta$, де β – довірча ймовірність. Таблиця має два вхідних параметри: β і k.

5.3.2. Розподіл Стьюдента

Розподіл Стьюдента має ще іншу назву – ***t розподіл .***

Нехай випадкова величина X_0 розподілена за стандартним нормальним законом $X_0 \in N_{0,1}$, а випадкова величина $\chi_k{}^2$ розподілена за законом χ^2 (хі-квадрат) з k ступенями свободи і не залежить від X_0 .

Тоді випадкова величина

$$t = \frac{X_0}{\sqrt{\chi_k^2 / k}} \tag{5.50}$$

розподілена за законом Стьюдента з числом ступенів свободи k.

Щільність ймовірності випадкової величини $\boldsymbol{t}$ задається співвідношенням

$$f_t(x) = L_n\left(1+\frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}},$$

де стала L_n визначається умовою нормування.

Зі зростанням числа ступенів свободи k розподіл Стьюдента наближається до стандартного нормального розподілу с параметрами a=0 і $\sigma^2 = 1$.

Числові характеристики розподілу Стьюдента: $m_x = 0$; $D_x = \dfrac{k}{k+2}$.

Для розподілу Стьюдента складено таблицю ймовірності того, що випадкова величина $|t|$ виявиться меншою за фіксоване значення t_1, тобто ймовірності $P\{|t| < t_1\} = \beta$, де β – довірча ймовірність (див. Додатки Таблиця 4).

Таблиця має два вхідних параметри:

− рівень значимості $2\alpha = 1 - \beta$;

− число ступенів свободи k.

Цей розподіл був введений англійським статистиком Вільямом Госсетом, який писав під псевдонімом Стьюдент, і застосовується у статистиці, при побудові довірчих інтервалів.

5.3.3. Розподіл Фішера – Снедекора

Розподіл Фішера – Снедекора має ще іншу назву – ***F розподіл***

Нехай незалежні випадкові величини χ_n^2 і χ_m^2 розподілені за законом хі-квадрат відповідно з n і m ступенями свободи.

Тоді випадкова величина

$$F_{n,m} = \frac{\chi_n^2 / n}{\chi_m^2 / m} \tag{5.51}$$

розподілена за законом Фішера зі ступенями свободи n і m .

Щільність ймовірності випадкової величини $F_{n,m}$ задається співвідношенням

$$f_{F_{n,m}}(x) = A \cdot \frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{\left(1+\frac{n}{m}x\right)^{\frac{n+m}{2}}} \cdot 1(x) ,$$

де стала A визначається умовою нормування.

Числові характеристики розподілу Фішера: $m_x = \frac{m}{m-2}, \quad m>2.$; $D_x = \frac{2m^2(n+m-2)}{n(m-2)^2(m-4)}, \quad m>4.$

Для розподілу Фішера складено таблицю ймовірності того, що випадкова величина $F_{n,m}$ виявиться більшою за фіксоване значення F_1, тобто ймовірності $P\{F_{n,m} > F_1\} = \beta$, де β – довірча ймовірність (див. Додатки Таблиця 6).

Таблиця має три вхідних параметри:

− довірча ймовірність β ;

− число ступенів свободи n;

− число ступенів свободи m.

Розподіл Фішера застосовується у статистиці при перевірці статистичних гіпотез.

5.4. Контрольні запитання

1. Розподіл Бернуллі.
2. Який розподіл називають біноміальним?
3. Які випадкові величини розподілені за біноміальним законом?
4. Навести формули для обчислення математичного сподівання, дисперсії і середнього квадратичного відхилення біноміальної величини.
5. Навести формулу для обчислення ймовірності влучення значення біноміальної величини в заданий діапазон $[k_1, k_2]$.
6. Який розподіл називають геометричним?
7. Навести формули для обчислення математичного сподівання, дисперсії і середнього квадратичного відхилення випадкової величини, що має геометричний розподіл.
8. Який розподіл називають гіпергеометричним?
9. Навести формули для обчислення математичного сподівання, дисперсії і середнього квадратичного відхилення випадкової величини, що має гіпергеометричний розподіл.
10. Який розподіл називають розподілом Пуассона?
11. Які випадкові величини розподілені за законом Пуассона?
12. Навести формули для обчислення математичного сподівання, дисперсії і середнього квадратичного відхилення випадкової величини, що має розподіл Пуассона.
13. Дати визначення потокові подій.
14. Дати визначення найпростішому потокові подій.
15. Який потік подій називається стаціонарним?
16. Який потік подій називається ординарним?
17. Який потік подій називається потоком без післядії?
18. Які випадкові величини розподілені за законом Пуассона?
19. Навести формулу математичної моделі найпростішого потоку подій.
20. Дати визначення функції надійності.
21. Який розподіл називають рівномірним ?
22. Записати в загальному вигляді інтегральну функцію рівномірно розподіленої випадкової величини.

23. Навести формули для обчислення математичного сподівання, дисперсії і середнього квадратичного відхилення випадкової величини, що має рівномірний розподіл.

24. Дати визначення випадковим величинам, розподіленим за показниковим законом.

25. Записати в загальному вигляді інтегральну функцію випадкової величини, розподіленої за показниковим законом.

26. Навести формули для обчислення математичного сподівання, дисперсії і середнього квадратичного відхилення випадкової величини, що має показниковий розподіл.

27. Навести формулу для обчислення ймовірності влучення значення випадкової величини, розподіленої за показниковим законом, в заданий діапазон $[a, b]$, де a і b – невід'ємні величини.

28. Який розподіл називають нормальним?

29. Записати в загальному вигляді інтегральну функцію нормально розподіленої випадкової величини.

30. Навести формули для обчислення математичного сподівання, дисперсії і середнього квадратичного відхилення випадкової величини, що має нормальний розподіл.

31. Навести рекурентне співвідношення для визначення центральних моментів нормально розподіленої випадкової величини.

32. Чому дорівнює коефіцієнт асиметрії нормально розподіленої випадкової величини?

33. Чому дорівнює коефіцієнт гостровершинності нормально розподіленої випадкової величини?

34. Навести формулу для обчислення ймовірності влучення значення випадкової величини, розподіленої за нормальним законом, в заданий діапазон $[c, d]$.

35. В чому полягає правило трьох сигм?

36. Які випадкові величини розподілені за законом Пірсона?

37. Які випадкові величини розподілені за законом Стьюдента?

38. Які випадкові величини розподілені за законом Фішера?

6. ВИПАДКОВІ ВЕКТОРИ І ФУНКЦІЇ ВИПАДКОВИХ АРГУМЕНТІВ

6.1. Випадкові вектори

Визначення 6.1. Випадковим вектором називають вектор $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,...,X_n)$, компоненти якого являють собою випадкові величини.

Для випадкового вектора так само, як і для випадкової величини, вводяться поняття інтегральної функції розподілу, щільності розподілу, визначаються числові характеристики.

Визначення 6.2. ***Інтегральна функція розподілу випадкового вектора*** – це така функція $F(x_1, x_2,..., x_n)$, яка при конкретних значеннях своїх аргументів чисельно дорівнює ймовірності того, що випадкові компоненти вектора виявляться менше за відповідні аргументи, тобто

$$F(x_1, x_2,..., x_n) = P\{X_1<x_1, X_2<x_2, ..., X_n<x_n\}. \tag{6.1}$$

Надалі будуть розглядатися тільки двовимірні випадкові вектори $\mathbf{Z}=(X,Y)$, де X,Y – компоненти вектора. Однак усі наведені положення в однаковій мірі справедливі і для багатовимірних векторів, або легко узагальнюються на випадок багатовимірних векторів.

За визначенням інтегральна функція $F(x,y)$ двовимірного випадкового вектора $\mathbf{Z} = (X,Y)$ – це функція , яка при кожних конкретних значеннях своїх аргументів x і y чисельно дорівнює ймовірності того, що випадкові компоненти вектора виявляться менше за відповідні аргументи, тобто $F(x,y) = P\{X<x, Y<y\}$.

В цьому разі ***геометричний зміст*** функції розподілу – ймовірність влучення випадкового вектора в безмежний квадрат з вершиною в точці (x_0, y_0) (рис. 6.1).

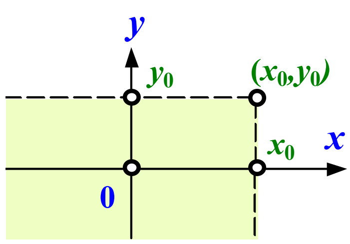


Рис. 6.1.

Властивості функції розподілу випадкового вектора.

Розглянемо властивості функції розподілу на прикладі двовимірного випадкового вектора $\boldsymbol{Z}=(X,Y)$.

1. $F(-\infty,-\infty)=0$; (6.2)

$F(x,-\infty)=0$; (6.3)

$F(-\infty,y)=0$. (6.4)

2. $F(\infty,\infty)=1$. (6.5)

3. $F(x,\infty)=P\{X<x,Y<\infty\}=P\{X<x\}=F_1(x)$; (6.6)

$F(\infty,y)=P\{X<\infty,Y<y\}=P\{Y<y\}=F_2(y)$. (6.7)

4. $F(x,y)$ – функція, що не зменшується від обох своїх аргументів.

5. Функція $F(x,y)$ неперервна зліва.

Врахування 3-ї властивості дозволяє за відомою інтегральною функцією $F(x,y)$ визначати інтегральні функції розподілу компонент, тобто $F_1(x)=F(x,\infty)$; $F_2(y)=F(\infty,y)$.

Для тривимірної інтегральної функції $F(x_1,x_2,x_3)$ справедливі вирази: $F_1(x_1)=F(x_1,\infty,\infty)$; $F_2(x_2)=F(\infty,x_2,\infty)$; $F_{2,3}(x_2,x_3)=F(\infty,x_2,x_3)$ і т.д.

Якщо обидві координати вектора $\boldsymbol{Z}=(X,Y)$ є дискретними випадковими величинами, то вектор $\boldsymbol{Z}$ називають ***дискретним випадковим вектором.*** Дискретний випадковий вектор задається набором значень $(x_i,\ y_j)$ та ймовірностями $p_{ij}=P\{X=x_i,\ Y=y_j\}$, з якими ці значення приймаються. Дискретний випадковий вектор, як правило задають таблицею розподілу (табл. 6.1).

Таблиця 6.1 - Таблиця розподілу

$X \backslash Y$	y_1	y_2	…	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{2m}
…	…	…	…	
x_n	p_{n1}	p_{n2}	…	p_{nm}

Сума всіх ймовірностей p_{ij} дорівнює одиниці.

У таблиці розподілу випадкового вектора міститься вся інформація про нього. Зокрема , ця таблиця дозволяє знайти розподіл координат вектора.

Оскільки подія $\{X=x_i\}$ складається з суми попарно несумісних подій $\{X=x_i,\ Y=y_1\}$, $\{X=x_i,\ Y=y_2\}$, …, $\{X=x_i,\ Y=y_m\}$, то розподіл ймовірностей p_k випадкової величини X знайдемо наступним чином:

$$p_k = P\{X=x_i\} = p_{i1} + p_{i2} + \ldots + p_{im}\,. \qquad (6.8)$$

При сумуванні ймовірностей p_{kj} по стовпцях знаходимо розподіл ймовірностей випадкової величини Y.

Приклад 6.1. Знайти розподіл координат випадкового вектора $\boldsymbol{Z}=(X,Y)$, заданого таблицею розподілу:

X \ *Y*	**-2**	**-1**	**2**
0	0,15	0,05	0,25
1	0,35	0,2	0

Розв'язання. На підставі формули (6.8) одержимо розподіли координат ***X*** і ***Y***:

X	**0**	**1**
p	0,45	0,55

Y	**-2**	**-1**	**2**
p	0,5	0,25	0,25

6.1.1. Ймовірність влучення випадкового вектора в заданий діапазон

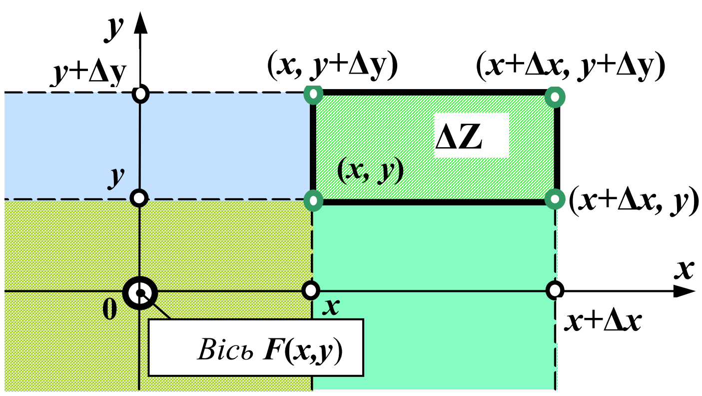


Рис. 6.2.

Ймовірність влучення дискретного або неперервного випадкового вектора в заданий діапазон (прямокутник) може бути визначена за допомогою однієї і тієї ж формули, заснованої на використанні інтегральної функції розподілу.

Нехай відома інтегральна функція $F(x,y)$ і задані параметри ділянки $\Delta\mathbf{Z}$, на яку з шуканою ймовірністю потрапляє випадковий вектор **Z** (рис.6.2), тобто задані координати кутів прямокутника $\Delta\mathbf{Z}$**.** Тоді шукана ймовірність

$$P\{(X,Y)\in\Delta\mathbf{Z}\}=F(x+\Delta x,y+\Delta y)-F(x,y+\Delta y)-F(x+\Delta x,y)+F(x,y)\ . \qquad (6.9)$$

6.1.2. Щільність розподілу випадкового вектора

Якщо компоненти випадкового вектора є неперервними величинами, то закон розподілу цього вектора може бути заданий у формі щільності розподілу (диференціальної функції розподілу).

Щільність розподілу випадкового вектора – це ліміт відношення ймовірності влучення випадкового вектора на нескінченно малу ділянку $\Delta\mathbf{Z}$ до площі цієї ділянки:

$$f(x,y)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to o}}\frac{P\{(X,Y)\in\Delta\mathbf{Z}\}}{\Delta x\cdot\Delta y}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to o}}\frac{F(x+\Delta x,y+\Delta y)-F(x,y+\Delta y)-F(x+\Delta x,y)+F(x,y)}{\Delta x\cdot\Delta y},$$

тобто

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}.$$

Визначення 6.3. ***Щільність розподілу f(x, y) двовимірного випадкового вектора*** називається друга мішана похідну від інтегральної функції розподілу

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}. \qquad (6.10)$$

При відомій щільності розподілу випадкового вектора інтегральна функція визначається за допомогою зворотного перетворення

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(t,\tau)\,dt\,d\tau. \qquad (6.11)$$

Розглянемо властивості функції щільності розподілу випадкового вектора $f(x,y)$.

Властивості функції щільності розподілу випадкового вектора.

1. $f(x,y) \geq 0$. (6.12)

2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\partial x\,\partial y = 1$; (6.13)

3. $f_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$; (6.14)

$f_2(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$; (6.15)

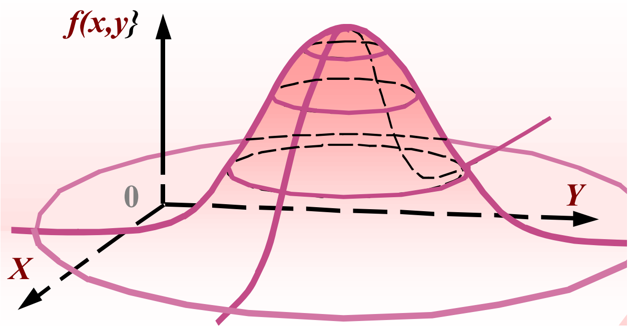


Рис. 6.3.

З ***геометричної точки*** зору друга властивість щільності розподілу (6.13) означає, що об'єм, укладений між поверхнею $f(x,y)$ і координатною площиною $X0Y$ (рис.6.3), дорівнює одиниці. Перша властивість (6.12) говорить про те, що поверхня $f(x,y)$ не може бути розташовуваною нижче координатної площини $X0Y$.

6.1.3. Умовні закони розподілу

Визначення 6.4. ***Умовний закон розподілу*** у формі $f(x/y)$ або $F(x/y)$ – це закон розподілу випадкової величини X, обчислений за умови, що випадкова величин Y прийняла конкретне значення.

Визначення 6.5. Випадкові величини ***X*** и ***Y*** називаються ***незалежними***, якщо закон розподілу випадкової величини X не залежить від того, яке значення прийняла випадкова величина Y. У протилежному випадку величини X и Y називаються ***залежними***.

Якщо випадкові величини X і Y є ***незалежними***, то для дискретних величин

$P\{X{=}x_i\,/Y{=}y_j\}=P\{X{=}x_i\}$, або для неперервних

$$f(x/y) = f(x) \quad \text{і} \quad f(y/x) = f(y) .$$

Випадкові величини X і Y незалежні тоді і тільки тоді, коли при всіх значеннях i та виконується рівність

$$P\{X{=}x_i, Y{=}y_j\} = P\{X{=}x_i\} \cdot P\{\ Y{=}y_j\} .$$

Тобто, двовимірний розподіл вектора відновлюється по одновимірних розподілах цього координат лише у тому випадку, коли координати вектора є незалежними випадковими величинами.

Якщо випадкові величини X и Y є ***залежними***, то справедливо наступне співвідношення:

$$P\{X = x_i \,/\, Y = y_j\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{Y = y_j\}}, \tag{6.16}$$

або

$$f(x,y) = f(x) \cdot f(y/x) = f(y) \cdot f(x/y) .$$

Звідки

$$f(y/x) = \frac{f(x,y)}{f(x)} = \frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy} \quad \text{і} \quad f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} = \frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx}. \tag{6.17}$$

Приклад 6.2. В умовах прикладу 6.1 знайти умовні розподіли $P\{X{=}x_i, Y{=}y_j\}$ та з'ясувати питання про те, чиє випадкові величини X і Y залежними**.**

Розв'язання. За формулою (6.16) знайдемо умовний розподіл X при Y=-2:

$$P\{X=0/Y=-2\} = \frac{P\{X=0, Y=-2\}}{P\{Y=-2\}} = \frac{0{,}15}{0{,}5} = 0{,}3; \quad P\{X=1/Y=-2\} = \frac{P\{X=1, Y=-2\}}{P\{Y=-2\}} = \frac{0{,}35}{0{,}5} = 0{,}7.$$

Аналогічно одержуємо розподіл при Y=-1: і Y=2:

$$P\{X=0/Y=-1\} = \frac{P\{X=0, Y=-1\}}{P\{Y=-1\}} = \frac{0{,}05}{0{,}25} = 0{,}2; \quad P\{X=1/Y=-1\} = \frac{P\{X=1, Y=-1\}}{P\{Y=-1\}} = \frac{0{,}2}{0{,}25} = 0{,}8.$$

$$P\{X=0/Y=2\} = \frac{P\{X=0, Y=2\}}{P\{Y=2\}} = \frac{0{,}25}{0{,}25} = 1; \quad P\{X=1/Y=2\} = \frac{P\{X=1, Y=2\}}{P\{Y=2\}} = \frac{0}{0{,}25} = 0.$$

Випадкові величини X і Y є залежними, тому що, наприклад,

$$P\{X{=}0\} = 0{,}45 \neq P\{X{=}0 \,/Y{=}\,-2\} = 0{,}3 .$$

6.1.4. Числові характеристики випадкового вектора

Визначення 6.6. ***Математичним сподіванням*** випадкового вектора $\boldsymbol{X}=(X_1, X_2,\ldots, X_n)$ є такий невипадковий вектор $\boldsymbol{m}=(m_1, m_2,\ldots, m_n)$, компонентами якого є математичні сподівання відповідних компонент випадкового вектора $\boldsymbol{X}$.

Визначення 6.7. ***Дисперсію*** випадкового вектора $\boldsymbol{X}=(X_1, X_2,\ldots, X_n)$ є такий невипадковий вектор $\boldsymbol{D}=(D_1, D_2,\ldots, D_n)$, компонентами якого є дисперсії відповідних компонент випадкового вектора $\boldsymbol{X}$.

Визначення 6.8. ***Кореляційним моментом*** $\boldsymbol{K_{xy}}$ двомірного випадкового вектора $\boldsymbol{Z}=(X,Y)$ називають другий мішаний центральний момент

$$\boldsymbol{K}_{xy} = \mu_{11} = \mathrm{M}[(X-m_x)\cdot(Y-m_y)] .$$

Для *дискретних* випадкових величин кореляційний момент визначається за формулою

$$K_{xy} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i - m_x)(y_i - m_y)p_{ij} , \tag{6.18}$$

де $p_{ij} = P(X=x_i, Y=y_i)$;

m_x – математичне сподівання компоненти X випадкового вектора $\boldsymbol{Z}$;

m_y – математичне сподівання компоненти Y випадкового вектора $\boldsymbol{Z}$;

n – кількість можливих значень компоненти X;

m – кількість можливих значень компоненти Y.

Для *неперервних* випадкових величин кореляційний момент визначається за формулою

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x - m_x)(y - m_y)f(x, y)dxdy, \tag{6.19}$$

де $f(x,y)$ – щільність розподілу випадкового вектора $\boldsymbol{Z}$.

Кореляційний момент характеризує ступінь розкиду випадкових величин навколо їх математичного сподівання, а також ступінь лінійної залежності між випадковими величинами X і Y.

Для характеристики тільки ступеня лінійної залежності між випадковими величинами X і Y використовується ***коефіцієнт кореляції.***

Визначення 6.9. ***Коефіцієнтом кореляції r_{xy}*** випадкових величин X і Y називається величина

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}. \tag{6.20}$$

Коефіцієнт кореляції r_{xy} є без вимірною величиною.

Властивості коефіцієнта кореляції

1. По абсолютній величині коефіцієнта кореляції не перевершує одиниці:

$$-1 \le r_{xy} \le 1 .$$

2. Якщо X і Y є незалежними між собою величинами, то $r_{xy} = 0$.

3. Якщо X і Y зв'язані *лінійною* залежністю $Y = aX + b$, то

$r_{xy} = -1$ при $a < 0$ і

$r_{xy} = 1$ при $a > 0$.

Визначення 6.10. Дві випадкові величини X і Y називаються ***корельованими***, якщо їх кореляційний момент K_{xy} (або коефіцієнт кореляції r_{xy}) відмінний від нуля, і некорельованими інакше, тобто при $K_{xy}=0$ ($r_{xy}=0$).

Зауваження 1. Якщо дві випадкові величини X і Y корельовани то вони залежні поміж себе. Зворотне твердження вірне не завжди: з існування залежності між випадковими величинами на витікає, що вони корельовани.

Зауваження 2. З незалежності двох величин слідує їх некорельованість, але з некорельованості ще не можна укласти про незалежність цих величин.

Для випадкового ***n***-мірного вектора $\boldsymbol{X}$=(X_1, X_2,…, X_n) задається n-мірна ***кореляційна матриця***

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1j} & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2j} & \cdots & K_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{i1} & K_{i2} & \cdots & K_{ij} & \cdots & K_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & K_{nj} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix}, \tag{6.21}$$

де $K_{ij} = M[(X_i\text{-}m_i)\,(X_j\text{-}m_j)]$;

$K_{ii} = M[(X_i\text{-}m_i)^2] = D_i$ – дисперсія i-го компонента випадкового вектора $\boldsymbol{X}$;

$K_{ij} = K_{ji}$.

Таким чином, для двовимірного випадкового вектора $\boldsymbol{Z}$=(X,Y) кореляційна матриця має вигляд:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} D_x & K_{x,y} \\ K_{y,x} & D_y \end{bmatrix} . \tag{6.22}$$

Для аналізу ступеня лінійної залежності між компонентами випадкового вектора $\boldsymbol{X}$ використовується ***нормована кореляційна матриця*** **R**, елементами якої є коефіцієнти кореляції r_{ij} відповідних компонент вектора $\boldsymbol{X}$**,**

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1j} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2j} & \cdots & r_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{i1} & r_{i2} & \cdots & r_{ij} & \cdots & r_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nj} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix}, \tag{6.23}$$

де $r_{ij} = \dfrac{K_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$; $r_{ii} = \dfrac{D_i}{\sigma_i^2} = 1$; $r_{ij} = r_{ji}$.

6.2. Функції випадкових аргументів

Визначення 6.10. Якщо кожному значенню випадковой величини ***X*** відповідає однє можливе значення випадковой величини *Y,* то величину *Y* називають ***функцєю випадкового аргументу***.

Нехай випадкова величина $Y=\varphi(X)$ є функцією випадкового дискретного аргументу X, для якого відомий закон розподілу у вигляді ряду розподілу

x_i	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

Тоді кожному значенню x_i можна поставити у відповідність значення $y_i= \varphi(x_i)$

x_i	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n
$y_i=\varphi(x_i)$	$\varphi(x_1)$	$\varphi(x_2)$	...	$\varphi(x_n)$

} ряд розподілу X

} ряд розподілу Y

У загальному випадку для $y_i=\varphi(x_i)$ остання таблиця не є рядом розподілу (у точному розумінні цього терміна), однак усі необхідні для такого ряду значення випадкової функції і відповідні ймовірності в ній є.

Приклад 6.3. Випадкова величина ***X*** задана рядом розподілу:

X	**-2**	**-1**	**1**	**3**
p	0,2	0,1	0,4	0,3

Знайти ряд розподілу випадкової величини $\boldsymbol{Y=X^2}$.

Розв'язання. Знайдемо відповідні значенні випадкової величини ***Y***, та їх ймовірності:

При $x_1 = -2, \quad y_1 = (-2)^2 = 4, \quad p_1 = 0{,}2;$

$x_2 = -1, \quad y_2 = (-1)^2 = 1, \quad p_2 = 0{,}1;$

$x_3 = 1, \quad y_3 = 1^2 = 1, \quad p_3 = 0{,}4;$

$x_4 = 3, \quad y_2 = 3^2 = 9, \quad p_4 = 0{,}3.$

Таким чином, таблиця прийме вид

Y	**4**	**1**	**1**	**9**
p	0,2	0,1	0,4	0,3

Упорядкувавши значення випадкової величини ***Y***, і додавши відповідні однаковим значенням ймовірності остаточно отримаємо ряд розподілу ***Y***:

Y	**1**	**4**	**9**
p	0,5	0,2	0,3

Числові характеристики і законом розподілу функції випадкового аргументу можуть бути визначені за відомими характеристиками і законом розподілу її аргументу.

6.2.1. Числові характеристики функції випадкових аргументів

Нехай випадкова величина Y є функцією випадкових аргументів $Y = \varphi\ (X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Нехай відомий закон розподілу $g(y)$ функції випадкових аргументів. Тоді основні числові характеристики функції Y визначаються наступними виразами:

$$m_y = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot g(y)\,dy\,; \tag{6.24}$$

$$D_y = \int_{-\infty}^{\infty} (y - m_y)^2\, g(y)\,dy\,. \tag{6.25}$$

Однак, як уже наголошувалось, для визначення числових характеристик зовсім не обов'язково знати закон розподілу g(y).

Якщо випадкова величина $Y=\varphi(X)$ є функцією випадкового дискретного аргументу X, для якого відомий закон розподілу у вигляді ряду розподілу.

То, числові характеристики функції Y визначаються наступними виразами:

$$m_y = M[\varphi(x)] = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) p_i \,. \tag{6.26}$$

Для випадкової неперервної величини

$$m_y = M[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) dx \,. \tag{6.27}$$

Для системи двох випадкових аргументів (6.26) і (6.27) будуть мати відповідно вигляд:

$$m_z = M[\varphi(x,y)] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \varphi(x_i, y_i) p_{ij} \,; \tag{6.28}$$

$$m_z = M[\varphi(x,y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,y) f(x,y) dxdy \,. \tag{6.29}$$

У загальному випадку (для двох і більше випадкових аргументів) (6.26) і (6.27) відповідно будуть мати вигляд:

$$m_y = M[\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)] = \sum_{i=1}^{n} \cdots \sum_{j=1}^{n} \varphi(x_1, x_2, ..., x_n) p_{i_1 i_2 \dots i_n} \,;$$

$$m_y = M[\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)] = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, x_2, ..., x_n) f(x_1, x_2, ..., x_n) dx_1 dx_2 ... dx_n \,.$$

Аналогічно можуть бути знайдені будь-які інші числові характеристики (моменти) функції випадкових аргументів. Наприклад, дисперсії:

$$D_y = D[\varphi(x)] = \sum_{i=1}^{n} \left[\varphi(x) - m_y\right]^2 p_i \text{ , або}$$

$$D_y = D[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\varphi(x) - m_y\right]^2 f(x) dx \,.$$

$$D_z = D[\varphi(x,y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left[\varphi(x,y) - m_y\right]^2 f(x,y)dxdy\,.$$

$$D_y = D[\varphi(x_1,x_2,...,x_n)] = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\left[\varphi(x_1,x_2,...,x_n) - m_y\right]^2 f(x_1,x_2,...,x_n)dx_1dx_2...dx_n\,.$$

Приклад 6.4. Випадкова величина ***X*** задана рядом розподілу:

X	**2**	**3**	**4**
p	0,2	0,6	0,2

Знайти числові характеристики функції $Y = \sin\dfrac{\pi x}{2}$.

Розв'язання. За формулою (6.26) знайдемо:

$$m_y = \sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i)p_i = \sum_{i=1}^{3}\sin\frac{\pi x}{2}\cdot p_i = \sin\frac{\pi\cdot 2}{2}\cdot 0{,}2 + \sin\frac{\pi\cdot 3}{2}\cdot 0{,}6 + \sin\frac{\pi\cdot 4}{2}\cdot 0{,}2 =$$

$$= 0 - 1\cdot 0{,}6 + 0 = -0{,}6\,.$$

Знайдемо дисперсію

$$D_y = D[\varphi(x)] = \sum_{i=1}^{n}\left[\varphi(x) - m_y\right]^2 p_i, \text{ або } D_y = \sum_{i=1}^{n}\varphi(x)^2 p_i - (m_x)^2\,.$$

Тобто,

$$D_y = \sum_{i=1}^{3}\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)^2 p_i - (m_y)^2 = \left(\sin\frac{\pi\cdot 2}{2}\right)^2 0{,}2 + \left(\sin\frac{\pi\cdot 3}{2}\right)^2 0{,}6 + \left(\sin\frac{\pi\cdot 4}{2}\right)^2 0{,}2 - (-0{,}6)^2 =$$

$$= 0{,}6 + 0{,}36 = 0{,}96\,.$$

6.2.2. Теореми про числові характеристики функції випадкових аргументів

Над випадковими функціями можна проводити теж самі операції, що і над звичайними: додавання, множення, інтегрування і т.п.

Розглянемо обчислення математичного сподівання і дисперсії для найпростіших функцій випадкових аргументів.

Теорема 6.1. Математичне сподівання невипадкової величини c (константи) дорівнює самій невипадковій величині:

$$M[c] = c\,. \tag{6.30}$$

Доведення: $M\left[c\right] = \sum_{i=1}^{n} x_i\ p_i\ = c \cdot 1 = c$.

Теорема 6.2. Дисперсія невипадкової величини c дорівнює нулю:

$$D[c] = 0\,. \tag{6.31}$$

Доведення: $D\left[c\right] = M\left[\left(x_i - m_x\right)^2\right] = M\left[\left(c - c\right)^2\right] = M\left[0^2\right] = M\left[0\right] = 0$.

Теорема 6.3. Математичне сподівання добутку невипадкової величини c і випадкової величини X дорівнює добутку невипадкової величини c і математичного сподівання випадкової величини X:

$$M[cX] = cM[X]\,. \tag{6.32}$$

Доведення: $M\left[cX\right] = \sum_{i=1}^{n} cx_i = c\sum_{i=1}^{n} x_i\ = cM\left[X\right]$.

Теорема 6.4. Дисперсія добутку невипадкової величини c і випадкової величини X дорівнює добутку квадрата невипадкової величини c і дисперсії випадкової величини X:

$$D[cX] = c^2D[X]\,. \tag{6.33}$$

Доведення:

$$D\left[cX\right] = M\left[(cx - m_{cx})^2\right] = M\left[(cx - cm_x)^2\right] = M\left[c^2(x - m_x)^2\right] = c^2M\left[(x - m_x)^2\right] = c^2D\left[X\right].$$

***Наслідок теореми* 6.3**:

$$\sigma\left[cX\right] = \sqrt{D\left[cX\right]} = \sqrt{c^2D\left[X\right]} = \left|c\right| \cdot \sigma_x\,. \tag{6.34}$$

Теорема 6.5. Математичне сподівання суми випадкових величин дорівнює сумі їх математичних сподівань:

$$M[X+Y] = M[X] + M[Y]\,. \tag{6.35}$$

Доведення:

$$M\left[X+Y\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x+y)f(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)dxdy+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}yf(x,y)dxdy=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x\left\{\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy\right\}dx+\int_{-\infty}^{\infty}y\left\{\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx\right\}dy=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f(x)dx+\int_{-\infty}^{\infty}y\cdot f(y)dy=M\left[X\right]+M\left[Y\right].$$

Теорема 6.5 справедлива як для залежних, так і незалежних випадкових величин X і Y і може бути узагальнена для суми n випадкових величині.

$$M\left[\sum_{i=1}^{n}X_i\right]=\sum_{i=1}^{n}M\left[X_i\right]. \tag{6.36}$$

Теорема 6.6. Математичне сподівання лінійної функції від n випадкових аргументів X_i (i =1, 2,…, n) дорівнює цій же лінійній функції від математичних сподівань випадкових величин X_i:

$$M\left[Y\right]=M\left[\sum_{i=1}^{n}a_iX_i+b\right]=\sum_{i=1}^{n}a_iM\left[X_i\right]+b. \tag{6.37}$$

Доведення. Твердження (6.35) очевидно з погляду на теореми 6.3, 6.5 і 6.1.

Теорема 6.7. Дисперсія суми випадкових величин X і Y дорівнює сумі їх дисперсій, збільшеній на подвоєний кореляційний момент цих же величин:

$$D[X+Y] = D[X] + D[Y] + 2K_{xy}. \tag{6.38}$$

Доведення: $D\left[X+Y\right]=M\left[\left((x+y)-m_{x+y}\right)^2\right]=M\left[\left(x+y-m_x-m_y\right)^2\right]=$

$$=M\left[\left(x-m_x\right)^2+2\left(x-m_x\right)\left(y-m_y\right)+\left(y-m_y\right)^2\right]=$$

$$=M\left[\left(x-m_x\right)^2\right]+M\left[\left(y-m_y\right)^2\right]+2M\left[\left(x-m_x\right)\left(y-m_y\right)\right]=D\left[X\right]+D\left[Y\right]+2K_{xy}.$$

***Наслідок теореми* 6.7.** Дисперсія суми незалежних величин дорівнює сумі їх дисперсій:

$$D[X+Y] = D[X] + D[Y], \tag{6.39}$$

оскільки $K_{xy} = 0$.

Теорема 6.8. Дисперсія лінійної функції n випадкових незалежних аргументів X_i (i=1, 2,…, n) визначається за формулою

$$D[Y] = D\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 D[X_i]. \qquad (6.40)$$

Доведення. Формула (6.40) очевидна з погляду на теореми 6.4, 6.7 і 6.2.

Теорема 6.9. Математичне сподівання добутку випадкових величин X і Y визначається за формулою:

$$M[X\cdot Y] = M[X]\cdot M[Y] + K_{xy}. \qquad (6.41)$$

Доведення:

$$K_{xy} = M[(X-m_x)\cdot(Y-m_y)] = M[X\cdot Y - m_x\cdot Y - m_y\cdot X + m_x\cdot m_y] =$$

$$= M[X\cdot Y] - m_x\cdot m_y - m_x\cdot m_y + m_x\cdot m_y = M[X\cdot Y] - m_x\cdot m_y.$$

Звідки $M[X\cdot Y] = M[\mathrm{X}]\cdot M[Y] + K_{xy}$.

***Наслідок теореми* 6.9.** Математичне сподівання добутку незалежних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань:

$$M[XY] = M[X]\cdot M[Y], \qquad (6.42)$$

оскільки $K_{xy} = 0$.

Використовував рівність (6.420 кореляційний момент двох же величин: X і Y можна визначити таким чином:

$$K_{xy} = M[X\cdot Y] - M[X]\cdot M[Y] \qquad (6.43)$$

Теорема 6.10. Дисперсія добутку незалежних випадкових величин X і Y визначається за формулою:

$$D[X\cdot Y] = D[X]\cdot D[Y] + m_y^2\, D[X] + m_x^2\, D[Y]. \qquad (6.44)$$

Доведення:

$$D[X\cdot Y] = M[(X\cdot Y - m_{xy})^2] = M[(X\cdot Y - m_x\, m_y)^2] = M[X^2\cdot Y^2] - 2m_x m_y\, M[X\cdot Y] + m_x^2\, m_y^2 =$$

$$= M[X^2]\cdot M[Y^2] - 2\, m_x m_y m_x m_y + m_x^2\, m_y^2 = M[X^2]\cdot M[Y^2] - m_x^2\, m_y^2 =$$

$$= (D[X] + m_x^2)\,(D[Y] + m_y^2) - m_x^2\, m_y^2 = D[X]\cdot D[Y] + m_y^2\, D[X] + m_x^2\, D[Y]\ .$$

***Наслідок теореми* 6.10.** При $m_x = 0$ і $m_y = 0$

$$D[X\cdot Y] = D[X]\cdot D[Y]\,. \tag{6.45}$$

Приклад 6.5. Знайти кореляційний момент випадкового вектора $\boldsymbol{Z}=(X,Y)$, заданого таблицею розподілу:

X \ Y	1	2
2	0,3	0,5
3	0,1	0,1

Розв'язання. За формулами (6.26) і (6.28) знаходимо

$$M[X\cdot Y] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i\cdot y_i\cdot p_{ij} = 1\cdot 2\cdot 0{,}3 + 2\cdot 2\cdot 0{,}5 + 3\cdot 1\cdot 0{,}1 + 3\cdot 2\cdot 0{,}1 = 3{,}5\,;$$

$$m_x = 2\cdot 0{,}3 + 2\cdot 0{,}5 + 3\cdot 0{,}1 + 3\cdot 0{,}1 = 2{,}2\ .\ m_y = 1\cdot 0{,}3 + 1\cdot 0{,}1 + 2\cdot 0{,}5 + 2\cdot 0{,}1 = 1{,}6\ .$$

Тоді за формулою (6.43) одержимо

$$K_{xy} = M[X\cdot Y] - m_x\cdot m_y = 3{,}5 - 2{,}2\cdot 1{,}6 = -0{,}02\ .$$

Приклад 6.6. Випадковий вектор $\boldsymbol{Z}=(X,Y)$ рівномірно розподілений в області $D\{(x,y): 0<y<x^2,\quad 0<x<1\}$. Знайти кореляційний момент його координат.

Розв'язання. Площа області D дорівнює $S_D = \int\limits_0^1\int\limits_0^{x^2} dxdy = \frac{1}{3}.$ Отже, якщо $(x,y)\in D$, то для рівномірно розподіленого вектора щільність розподілу дорівнює $f(x,y) = \frac{1}{S_D} = \frac{1}{1/3} = 3$. Тоді за формулами (6.27), (6.29) і (6.43) одержимо

$$M[X\cdot Y]=\int_0^1\int_0^{x^2} x\cdot y\cdot f(x,y)dxdy = 3\int_0^1\int_0^{x^2} xydxdy = \frac{1}{4}.$$

$$m_x = \int_0^1\int_0^{x^2} x\cdot f(x,y)dxdy = 3\int_0^1\int_0^{x^2} xdxdy = \frac{3}{4}. \quad m_y = \int_0^1\int_0^{x^2} y\cdot f(x,y)dxdy = 3\int_0^1\int_0^{x^2} ydxdy = \frac{3}{10}.$$

$$K_{xy} = M[X\cdot Y]-m_x\cdot m_y = \frac{1}{4}-\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{10}=\frac{1}{40}\ .$$

Приклад 6.7. Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини $\boldsymbol{Z}$=2*X*-*Y*+7 , якщо $m_x = 1,\quad m_y = -2,\quad D_x = 4,\quad D_y = 9,\quad r_{x,y} = 0{,}5.$

Розв'язання. Застосовуючи теореми для числових характеристик отримуємо

$$M[Z]=M[2X-Y+7]=2\cdot m_x - 1\cdot m_y + 7 = 2\cdot 1+2+7=11.$$

Для обчислення дисперсії попередньо знайдемо кореляційний момент випадкової величини $\boldsymbol{Z}$ з формули (6.20):

$$K_{xy} = r_{xy}\sigma_x\sigma_y.$$

Тобто,

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{4} = 2,\quad \sigma_y = \sqrt{D_y} = \sqrt{9} = 3,\quad K_{xy} = r_{xy}\sigma_x\sigma_y = 0{,}5\cdot 2\cdot 3 = 3.\quad .$$

Тоді $\quad D[Z]=D[2x-Y+7]=2^2\cdot D_x - 1^2\cdot D_y + 2\cdot K_{x,y} = 4\cdot 4 - 9 + 2\cdot 3 = 13.$

6.2.3. Закон розподілу функції випадкових аргументів

В багатьох стохастичних задачах часто виникає необхідність визначити закон розподілу функції випадкового аргументу при відомому законі розподілу випадкового аргументу. Розглянемо таку задачу для монотонних функцій випадкового аргументу.

Нехай неперервна випадкова величина *X* розподілена в інтервалі (*a,b*) з щільністю розподілу *f*(*x*). Нехай інша випадкова величина *Y* пов'язана з *X* функціональною залежністю *Y* = *φ*(*X)*. При цьому функція *φ*(*X)* – функція монотонно

зростаюча на інтервалі (a,b), неперервна і має перші похідні (рис. 6.4). Потрібно знайти щільність розподілу $g(x)$ випадкової величини Y.

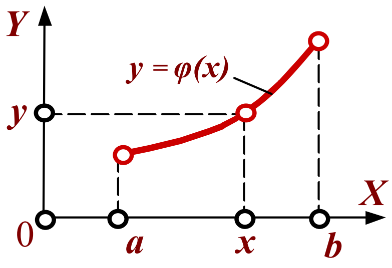


Рис. 6.4

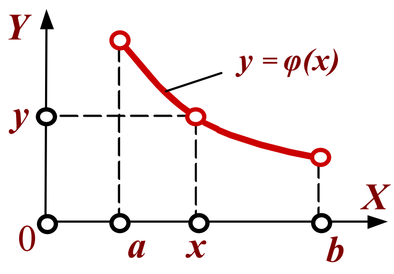


Рис. 6.5

Відповідно до **визначення 4.5** знайдемо інтегральну функцію випадкової величини Y

$$G(y) = P\{Y < y\} = P\{a < X < x\} = \int_a^x f(x)dx \, .$$

Визначимо x через y: $x = \varphi^{-1}(y)$, де φ^{-1} – функція, зворотна до функції φ. Тоді

$$G(y) = \int_a^{\varphi^{-1}(y)} f\left[\varphi^{-1}(y)\right]\cdot\left[\varphi^{-1}(y)\right]' dy \, .$$

Оскільки щільність розподілу $g(x)$ є похідною від інтегральної функції, то

$$g[y] = G'(y) = f\left[\varphi^{-1}(y)\right]\cdot\left[\varphi^{-1}(y)\right]' \, . \qquad (6.46)$$

Нехай тепер функція $\varphi(X)$ – функція монотонно ***спадна*** на інтервалі (a,b), неперервна і має перші похідні (рис. 6.5).

Тоді

$$G(y) = P\{Y < y\} = P\{x < X < b\} = \int_x^b f(x)dx \, .$$

Визначимо x через y, тобто

$$G(y) = \int_{\varphi^{-1}(y)a}^{b} f\left[\varphi^{-1}(y)\right]\cdot\left[\varphi^{-1}(y)\right]' dy = -\int_b^{\varphi^{-1}(y)} f\left[\varphi^{-1}(y)\right]\cdot\left[\varphi^{-1}(y)\right]' dy \, ,$$

або

$$g[y] = G'(y) = -f\left[\varphi^{-1}(y)\right]\cdot\left[\varphi^{-1}(y)\right]'. \tag{6.47}$$

Враховуючи (6.38) і (6.39) узагальнена формула для щільності розподілу монотонної функції випадкового аргументу прийме остаточний вигляд:

$$g[y] = G'(y) = f\left[\varphi^{-1}(y)\right]\cdot\left|\left[\varphi^{-1}(y)\right]'\right|. \tag{6.48}$$

Дійсно, якщо $\varphi(x)$ – зростаюча функція, то похідна $\varphi'(x)$ позитивна, звідки похідна $\left[\varphi^{-1}(y)\right]'$ теж позитивна. Якщо $\varphi(x)$ – спадна функція, то похідна $\varphi'(x)$ негативна, звідки похідна $\left[\varphi^{-1}(y)\right]'$ теж негативна. Але знак «–» у (6.39) робить результат позитивним. Отже, узагальнена формула щільності розподілу (6.40) справедлива в обох випадках.

Приклад 6.8. Неперервна випадкова величина ***X*** задана щільністю розподілу

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \notin [0;1]; \\ 2x & \text{при} \quad x \in [0;1]. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу випадкової величини ***Y*** $=3X+2$.

Розв'язання. Виразімо ***X*** через ***Y***, отримаємо $X = \frac{1}{3}Y - \frac{2}{3}$.

Для застосування формули (6.48) попередньо знайдемо:

$$\varphi^{-1}(y) = \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}; \qquad \frac{d\varphi^{-1}(y)}{dy} = \left(\frac{1}{3}y - \frac{2}{3}\right)' = \frac{1}{3}; \qquad \left|\frac{d\varphi^{-1}(y)}{dy}\right| = \left|\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}.$$

Знайдемо нові границі: при $x = 0, \quad y = 2,$

при $x = 1, \quad y = 5.$

Таким чином, отримуємо закон розподілу випадкової величини ***Y***:

$$g[y] = f\left[\varphi^{-1}(y)\right]\cdot\left|\left[\varphi^{-1}(y)\right]'\right| = 2\cdot\left(\frac{1}{3}y - \frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{9}y - \frac{4}{9}.$$

Тобто $$g(y)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\notin[2;5];\\ \frac{2}{9}y-\frac{4}{9} & \text{при} \quad x\in[2;5].\end{cases}$$

Приклад 6.9. Неперервна випадкова величина $\boldsymbol{X}\in N(0, \sigma^2)$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $\boldsymbol{Y}=X^2$.

Розв'язання. За умовами задачі випадкова величина $\boldsymbol{X}\in N(0, \sigma^2)$, тобто щільність розподілу $\boldsymbol{X}$ має вигляд:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},$$

так як параметри розподілу $N(0, \sigma^2)$ $a=0$, $\sigma^2=\sigma^2$.

Функція $y=x^2$ має дві обернені $\varphi_1^{-1}(y)=\sqrt{y}$; $\varphi_2^{-1}(y)=-\sqrt{y}$.

$$\frac{d\varphi_1^{-1}(y)}{dy}=\left(\sqrt{y}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{y}}; \qquad \left|\frac{d\varphi_1^{-1}(y)}{dy}\right|=\left|\frac{1}{2\sqrt{y}}\right|=\frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

$$\frac{d\varphi_2^{-1}(y)}{dy}=\left(-\sqrt{y}\right)'=-\frac{1}{2\sqrt{y}}; \qquad \left|\frac{d\varphi_2^{-1}(y)}{dy}\right|=\left|-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right|=\frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Тоді, за формулою (6.48) знаходимо

$$g[y]=f[\varphi^{-1}(y)]\cdot\left|\,[\varphi^{-1}(y)]\,\right|'.$$

$$g[y]=\frac{1}{2\sqrt{y}\cdot\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y}{2\sigma^2}}+\frac{1}{2\sqrt{y}\cdot\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y}{2\sigma^2}}=\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{y}{2\sigma^2}}, \quad (y>0).$$

6.3. Контрольні запитання

1. Дати визначення поняттю випадковий вектор.
2. Дати визначення поняттю інтегральна функція розподілу випадкового вектора.
3. Властивості інтегральної функції розподілу випадкового вектора.
4. Дати визначення і навести формулу щільності розподілу двовимірного випадкового вектора?
5. Навести формулу для зворотного перетворення щільності розподілу двовимірного випадкового вектора в інтегральну функцію.
6. Властивості щільності розподілу двовимірного випадкового вектора.
7. Які випадкові величини є незалежними?
8. Дати визначення математичного сподівання випадкового вектора.
9. Дати визначення дисперсії випадкового вектора.
10. Дати визначення кореляційного моменту двовимірного випадкового вектора.
11. Навести формули для визначення кореляційного моменту двовимірного випадкового вектора $Z = (X,Y)$ у випадку неперервних і у випадку дискретних компонент.
12. Що характеризує кореляційного момент двовимірного випадкового вектора?
13. Навести формулу для розрахунку коефіцієнта кореляції.
14. Що характеризує коефіцієнт кореляції?
15. Властивості коефіцієнта кореляції двовимірного випадкового вектора.
16. Які випадкові величини називаються корельованими?
17. Дати визначення функції випадкового аргументу.
18. Сформулювати теореми про математичне сподівання випадкових величин.
19. Сформулювати теореми про дисперсію випадкових величин.

...Откуда, наконец, вытекает то удивительное, по-видимому, следствие, что, если бы наблюдения над всеми событиями продолжать всю вечность, причем вероятность, наконец, перешла бы в полную достоверность, то было бы замечено, что в мире все управляется точными отношениями и постоянным законом изменений, так что даже в вещах, в высшей степени случайных, мы принуждены были бы признать как бы некоторую необходимость и, скажу я, рок.

Якоб Бернуллі, *«Ars conjectandi»* (1713).

7. ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ

7.1. Закон великих чисел

Сумлінно вивчивши весь вищевикладений матеріал, ми розуміємо, що не можна заздалегідь упевнено сказати, яке з можливих значень прийме випадкова величина у результаті випробування. Це залежить від багатьох випадкових причин, врахувати які неможливо. Однак, вивчення статистичних закономірностей показує, що при деяких умовах сумарна поведінка великої кількості випадкових величин майже втрачає *випадковий характер і стає закономірною*. Математичне формулювання цього твердження дається в групі теорем, що мають спільну назву **закону великих чисел.**

7.1.1. Нерівності Чебишова

Розглянемо нерівності, які відносяться до одного класу, що має назву “нерівності Чебишова” і дозволяють оцінити ймовірність відхилення випадкової величини від математичного сподівання. Нерівності справедливі як для неперервних, так і для дискретних випадкових величин.

Наступну нерівність часто називають *першою нерівністю Чебишова*, хоча в такій формі воно з'явилося вперше, в роботах Андрія Андрійовича Маркова (наприклад, *«Исчисление вероятностей»*, 1913 г.).

Отже,

Теорема 7.1. (***Нерівність Маркова***). Для кожної невід'ємної випадкової величини ***X***, що має математичне сподівання $M[X] < \infty$ при будь-якому $\varepsilon > 0$ справедлива нерівність

$$P\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{M[X]}{\varepsilon}. \qquad (7.1)$$

Доведення. Нехай ***X*** − неперервна випадкова величина ($x \geq 0$) має щільність розподілу $f(x) \geq 0$.
Тоді

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{\varepsilon} xf(x)dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} xf(x)dx,$$

так як $\int_{0}^{\varepsilon} xf(x)dx \geq 0,$ то

$$M[X] = \int_{0}^{\varepsilon} xf(x)dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} xf(x)dx \geq \int_{\varepsilon}^{+\infty} xf(x)dx \geq \int_{\varepsilon}^{+\infty} \varepsilon \cdot f(x)dx = \varepsilon \cdot P\{X \geq \varepsilon\}.$$

Отже, остаточно отримали $M[X] \geq \varepsilon \cdot P\{X \geq \varepsilon\}$, звідки $P\{X \geq \varepsilon\} \leq \dfrac{M[X]}{\varepsilon}$,

що і потрібно було довести.

Аналогічно, замінивши інтеграл сумою доводиться нерівність для дискретних випадкових величин.

З нерівності (7.1) випливає, що

$$P\{X < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{M[X]}{\varepsilon}. \qquad (7.2)$$

Приклад 7.1. Відомо, що у середньому студент запізнюється на лекцію на 2 хвилини. Оцінити ймовірність того, що студент спізниться не менше ніж на 5 хвилин.

Розв'язання. Нехай випадкова величина ***X*** − час запізнення студента на лекцію. За умовами задачі $M[X] = 2$ хв., $\varepsilon = 5$, тоді за формулою (7.1) маємо:

$$P\{X \geq 5\} \leq \frac{M[X]}{5} = \frac{2}{5} = 0{,}4.$$

Приклад 7.2. Середній термін служби автомобіля без капітального ремонту 4 роки. Оцінити ймовірність того, що даний автомобіль не прослужить більше 10 років без капітального ремонту.

Розв'язання. Нехай випадкова величина $\boldsymbol{X}$ − термін служби автомобіля без капітального ремонту. За умовами задачі $M[X] = 4$ р. , ε = 10.

За нерівністю (7.1) отримуємо:

$$P\{X \geq 10\} \leq \frac{M[X]}{10} = \frac{4}{10} = 0{,}4.$$

Таким чином, шукана ймовірність дорівнює

$$P\{X < 10\} = 1 - P\{X \geq 10\} = 1 - 0{,}4 = 0{,}6.$$

Якщо випадкова величина $\boldsymbol{X}$ приймає всі дійсні значення $(x \in R)$, то замість нерівності Маркова для отримання оцінок ймовірностей подій, пов'язаних з величиною $\boldsymbol{X}$ використають нерівність Чебишова.

Цю нерівність прямими методами довели, незалежно один від одного, у 1853 р. І. Бьєнеме і в 1866 р. Пафнутій Львович Чебишов, отже нерівність інколи називають нерівністю Чебишова − Бьєнеме.

Теорема 7.2. (*Нерівність Чебишова*). Для будь-якої випадкової величини ***X*,** що має дисперсію $D[X] < \infty$ при будь-якому $\varepsilon > 0$ справедлива нерівність

$$P\{|X - M[X]| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D[X]}{\varepsilon^2}, \tag{7.3}$$

тобто абсолютне відхилення випадкової величини від її математичного сподівання більше або дорівнює ε з імовірністю, не більшою за відношення дисперсії цієї випадкової величини до квадрата ε.

Доведення. Нехай $\boldsymbol{X}$ − неперервна випадкова величина має щільність розподілу $f(x) \geq 0$, тоді

$$P\{|X - M[X]| \geq \varepsilon\} = \int_{-\infty}^{M[X]-\varepsilon} f(x)dx + \int_{M[X]+\varepsilon}^{+\infty} f(x)dx = \int_{|x-M[X]|\geq\varepsilon} f(x)dx..$$

Однак, для дисперсії маємо

$$D[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[X])^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{M[X]-\varepsilon} (x - M[X])^2 f(x)dx + \int_{M[X]-\varepsilon}^{M[X]+\varepsilon} (x - M[X])^2 f(x)dx + \int_{M[X]+\varepsilon}^{+\infty} (x - M[X])^2 f(x)dx =$$

$$= \int_{M[X]-\varepsilon}^{M[X]+\varepsilon} (x - M[X])^2 f(x)dx + \int_{|x-M[X]|\geq\varepsilon} |x - M[X]|^2 f(x)dx \geq \int_{|x-M[X]|\geq\varepsilon} |x - M[X]|^2 f(x)dx \geq$$

$$\geq \varepsilon^2 \cdot \int_{|x-M[X]|\geq\varepsilon} f(x)dx = \varepsilon^2 \cdot P\{|X - M[X]| \geq \varepsilon\}.$$

Тобто

$$D[X] \geq \varepsilon^2 \cdot P\{|X - M[X]| \geq \varepsilon\}, \quad \text{звідки} \quad P\{|X - M[X]| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D[X]}{\varepsilon^2},$$

що і потрібно було довести.

З нерівності (7.3) випливає, що

$$P\{|X - M[X]| < \varepsilon\} = 1 - P\{|X - M[X]| \geq \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D[X]}{\varepsilon^2}. \tag{7.4}$$

Як наслідок з нерівності Чебишова отримаємо так зване “***правило трьох сигм*** ”, яке формулюють, так: ймовірність випадковій величині відхилитися від свого математичного сподівання більш, ніж на три корені з дисперсії, мала.

Зрозуміло, для кожного розподілу величина цієї ймовірності своя: для нормального розподілу, ця ймовірність дорівнює 0,0027 (див. пункт 5.2.3). Ми отримаємо вірну для всіх розподілів з кінцевою дисперсією оцінку зверху для «ймовірності випадкової величини відхилитися від свого математичного сподівання більш, ніж на три корені з дисперсії».

Наслідок 7.1. Для будь-якої випадкової величини ***X,*** що має математичне сподівання дисперсію $M[X] < \infty$ і дисперсію $D[X] = \sigma^2$ при $\varepsilon = 3\sigma$ справедлива нерівність

$$P\{|X - M[X]| \geq 3\sigma\} \leq \frac{D[X]}{(3\sigma)^2} = \frac{\sigma^2}{9\sigma^2} = \frac{1}{9},$$

тобто ймовірність того, що відхилення випадкової величини ***X*** від її математичного сподівання вийде за граничне 3σ, не може бути більш $\frac{1}{9}$. Це і є правило трьох сигм.

Нерівність Чебишова для частоти випадкової величини, розподіленої за ***законом Бернуллі***, має вигляд

$$P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right\}\leq\frac{D[X]}{n\varepsilon^2}=\frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}, \qquad (7.5)$$

або

$$P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}\geq 1-\frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}. \qquad (7.6)$$

Формула (7.6) дає оцінку знизу для відхилення частоті від ймовірності при розподілі Бернуллі.

Приклад 7.4. Монета підкидається 10000 разів. Оцінити ймовірність того, що частота випадання герба відрізняється від ймовірності більш ніж на одну соту.

Розв'язання. За умовами задачі треба оцінити зверху $P\left\{\left|\frac{m}{n}-\frac{1}{2}\right|\geq 0{,}01\right\}$, де $n=10^4$, m − число випадань герба, а X_i − незалежні, випадкові величини, що мають розподіл Бернуллі з параметром 1/2, рівні «числу гербів, що випали при i-м підкиданні» (тобто одиниці, якщо випав герб і нулю інакше).

Оскільки $p=\frac{1}{2}$, $D_x=p(1-p)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$, $\varepsilon=0{,}01$, шукана оцінка зверху за формулою (7.5) виглядає так:

$$P\left\{\left|\frac{m}{n}-\frac{1}{2}\right|\geq 0{,}01\right\}\leq\frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}=\frac{1/4}{10^4\cdot 0{,}01^2}=\frac{1}{4}.$$

Інакше кажучи, нерівність Чебишова дозволяє укласти, що, в середньому, не більше ніж в чверті випадків при 10000 підкиданнях монети частота випадання герба відрізнятиметься від 1/2 більш ніж на одну соту. Ми побачимо, наскільки це груба оцінка, коли познайомимося з *центральною граничною теоремою.*

Приклад 7.5. Середнє значення довжини деталі 50 см., а її дисперсія дорівнює 0,1. Оцінити ймовірність того, що взята навмання деталь виявиться по довжині в полі допуску не менше 49,5 і не більше 50,5 см.

Розв'язання. За нерівністю Чебишова треба оцінити знизу $P\{|X-M[X]|<\varepsilon\}$, де за умовами задачі $M[X]$=50, $\varepsilon=\frac{50,5-49,5}{2}=0,5$.

За формулою (7.4) отримуємо $P\{|X-50|<0,5\}\geq 1-\frac{D[X]}{\varepsilon^2}=1-\frac{0,1}{0,25}=0,6$.

Приклад 7.5. Дано: $P\{|X-M[X]|<\varepsilon\}\geq 0,9$ *і* $D[X]=0,009.$ Користуючись нерівністю Чебишова, знайти ε.

Розв'язання. Маємо $P\{|X-M[X]|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{D[X]}{\varepsilon^2}$. Отже

$$1-\frac{D[X]}{\varepsilon^2}\geq 0,9;\quad 1-\frac{0,009}{\varepsilon^2}\geq 0,9;\quad 0,1\varepsilon^2\leq 0,009;\quad \varepsilon^2\leq 0,09;$$

$$\varepsilon\in[0;\quad 0,3];\qquad \varepsilon=0,3.$$

7.1.2. Закон великих чисел у формі Чебишова

Нехай X_i (i=1, 2, …n) − випадкові величини з математичними сподіваннями $M[X_i]$. Законом великих чисел навивають теореми, які стверджують, що при збільшенні n до нескінченності різниця $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-M[X_i])$ збігається до нуля за ймовірністю, тобто для довільного малого ε > 0 має місце границя

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-M[X_i])\right|>\varepsilon\right\}=0. \tag{7.7}$$

Теорема Чебишова − одна з найбільш важливих форм закону великих чисел, яка встановлює зв'язок між середнім арифметичним спостережуваних значень випадкової величини та її математичним сподіванням.

Теорема 7.3. (*теорема Чебишова*). Якщо $X_1,..,X_n,..$ – послідовність попарно незалежних випадкових величин, що мають математичні сподівання $M[X_i]$ та кінцеві дисперсії, які обмежені однією і тією ж постійною: $D[X_1]<c,\ D[X_2]<c,\ \ldots,\ D[X_n]<c,$ то для будь-якого ε>0 ймовірність нерівності

$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\left[X_i\right]\right|<\varepsilon$ буде як завгодно близька до одиниці, якщо число випадкових величин n достатнє велике.

Тобто виконується граничне співвідношення

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\left[X_i\right]\right|<\varepsilon\right\}=1. \qquad (7.8)$$

Таким чином, теорема Чебишова (7.8) твердить , що середнє арифметичне попарно незалежних випадкових величин збігається за ймовірністю до середнього арифметичного їх математичних сподівань.

Доведення. Розглянемо нову випадкову величину $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$.

Знайдемо її математичне сподівання та дисперсію за теоремами про математичне сподівання та дисперсію попарно незалежних випадкових величин, тобто за формулами (624), (6.25), (6.27), (6.31)

$$M[\overline{X}]=M\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M[X_i]\ ; \qquad D[\overline{X}]=D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right]=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D[X_i].$$

Застосуємо до $\overline{X}$ нерівність Чебишова, для будь-якого ε>0 має місце :

$$P\left\{\left|\overline{X}-M\left[\overline{X}\right]\right|<\varepsilon\right\}\geq 1-\frac{D\left[\overline{X}\right]}{\varepsilon^2}.$$

Підставив значення $M[\overline{X}]$ і $D[\overline{X}]$ отримуємо

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M[X_i]\right|<\varepsilon\right\}\geq 1-\frac{\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D[X_i]}{\varepsilon^2}.$$

Оскільки за умовами теореми дисперсії випадкових величин обмежені однією і тією ж постійною c, тобто $D\left[X_1\right]\leq c,\ \ D\left[X_2\right]\leq c,\ \ \ldots,\ \ D\left[X_n\right]\leq c,$ то

$$D[\overline{X}]=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D[X_i]\leq\frac{cn}{n^2}=\frac{c}{n}$$

Підставив цю оцінку у попередню нерівність отримуємо

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M[X_i]\right|<\varepsilon\right\}\geq 1-\frac{\frac{c}{n}}{\varepsilon^2}=1-\frac{c}{n\varepsilon^2}. \qquad (7.9)$$

Перейдемо до границі при $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M[X_i]\right|<\varepsilon\right\}\geq\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{c}{n\varepsilon^2}\right)=1.$$

Оскільки ймовірність не може бути більше 1, то теорему доведено.

Наслідок 7.2. Якщо $X_1,..,X_n,..$ – попарно незалежні випадкові величини, що мають однакові математичні сподівання $M[X_i]=a$ та рівномірно обмежені дисперсії, то для будь-якого ε>0 ймовірність нерівності $\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\left[X_i\right]\right|<\varepsilon$ буде як завгодно близька до1, якщо кількість випадкових величин велика.

Тобто теорема Чебишова набуває вигляду:

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}\left\{\left|\frac{X_1+X_2+...X_n}{n}-a\right|<\varepsilon\right\}=1. \qquad (7.10)$$

Інакше кажучи, при великому числі незалежних дослідів n середнє арифметичне спостережуваних значень випадкової величини збігається за ймовірністю до її математичного сповідання.

Таким чином, закон великих чисел стверджує, що середнє арифметичне великого числа випадкових доданків «стабілізується» із зростанням цього числа. Як би сильно кожна випадкова величина не відхилялася від свого середнього значення, при підсумовуванні ці відхилення «взаємно гасяться», так що середнє арифметичне наближається до постійної величини.

Приклад 7.6. Гральний кубик підкидають 300 разів. Оцінити знизу ймовірність того, що середнє арифметичне числа очок, що випали, відхилиться від математичного сповідання за абсолютною величиною, не більше ніж на 0,2.

Розв'язання. Нехай $X_1,..,X_n,..$ – попарно незалежні випадкові величини, число очок, що випали при i- м підкиданні. Для кожної з величин X_i знайдемо

$$M[X_i]=\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)=3{,}5\ ;\quad D[X_i]=\frac{1}{6}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2)-3{,}5^2=\frac{35}{12}$$

Шукану оцінку отримуємо за (7.4), (7.9) і наслідком теореми Чебишова, де

$$n = 300, \quad M[X_i] = a = 3{,}5, \quad D[X_i] = \frac{35}{12}, \quad \varepsilon = 0{,}2 \quad ,$$

звідки $$P\left\{\left|\frac{1}{300}\sum_{i=1}^{300} X_i - 3{,}5\right| \le 0{,}2\right\} \ge 1 - \frac{35/12}{300 \cdot 0{,}2^2} \approx 0{,}7569 .$$

Приклад 7.7. Послідовність незалежних випадкових величин $X_1,..,X_n,...$ задається законом розподілу:

X_n	$-a$	a
p	$\frac{n+1}{2n+1}$	$\frac{n}{2n+1}$

Чи можна до даної послідовності застосувати теорему Чебишова?

Розв'язання. Для того, щоб до даної послідовності випадкових величин можна було застосувати теорему Чебишова, достатньо, щоб ці величини були попарно незалежними, мали скінченні математичні сподівання і рівномірно обмежені дисперсії.

Оскільки випадкові величини незалежні, то вони є попарно незалежними, тобто перша умова теореми Чебишова виконується.

Знайдемо математичні сподівання випадкових величин, що входять у задану послідовність:

$$M[X_n] = -a \cdot \frac{n+1}{2n+1} + a \cdot \frac{n}{2n+1} = -\frac{a}{2n+1}.$$

Отже, всі випадкові величини мають скінченні математичні сподівання $\left(-\frac{a}{2n+1}\right)$, тобто друга умова теореми Чебишова виконується.

Знайдемо дисперсії випадкових величин: $D[X_n] = M[X^2] - (M[X])^2$;

$$D[X_n] = (-a)^2 \cdot \frac{n+1}{2n+1} + a^2 \cdot \frac{n}{2n+1} - \left(-\frac{a}{2n+1}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{(2n+1)^2} \le a^2.$$

Таким чином зі збільшенням n дисперсії рівномірно обмежені числом a^2, тобто третя умова теореми Чебишова виконується.

Оскільки всі умови виконуються, до даної послідовності можна застосувати теорему Чебишова.

7.1.3. . Закон великих чисел у формах Хінчіна і Бернуллі

Якщо $X_1,..,X_n,..$ – послідовність попарно незалежних однаково розподілених випадкових величин, то закон великих чисел до такої послідовності можна застосувати і без припущення об обмеженості дисперсій. Цей факт встановлює теорема Хінчіна.

Теорема 7.4. (*теорема Хінчіна*). Нехай $X_1,..,X_n,..$ – послідовність попарно незалежних однаково розподілених випадкових величин, що мають кінцеві математичні сподівання $M[X_i] = a < \infty$. Тоді для будь-якого ε>0 виконується граничне співвідношення:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\right| < \varepsilon\right\} = 1. \tag{7.11}$$

Отримаємо як наслідок із ЗВЧ Чебишова закон великих чисел Я. Бернуллі (1713). На відміну від доведеного через півтора століття ЗВЧ Чебишова, що описує граничну поведінку середнього арифметичного випадкових величин з *довільними розподілами*, ЗВЧ Бернуллі — твердження лише для *схеми Бернуллі.*

Теорема 7.5. (*теорема Бернуллі*). Якщо в кожному з n незалежних випробуваннях ймовірність появи події A постійна і дорівнює p, то при досить великій кількості випробувань ймовірність того, що модуль відхилення відносної частоти появ події A в n випробуваннях від p буде як завгодно малим, як завгодно близька до 1:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1. \tag{7.12}$$

Доведення. Розглянемо випадкові величини $X_1,..,X_n$, де X_i – число появ події A в i-му випробуванні. При цьому X_i можуть приймати тільки два значення: 1 (подія A відбулася) з ймовірністю p і 0 (подія A не відбулася) з ймовірністю $(1-p)$. Розглянуті випадкові величини попарно незалежні, мають скінченні математичні сподівання $M[X_i]=p$ і рівномірно обмежені дисперсії (тому що

$D[X] = p(1-p)$, але $p = \frac{1}{2}$, тобто $p(1-p) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$), отже, до них можна застосувати теорему Чебишова:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M\left[X_i\right]\right| < \varepsilon\right\} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - p\right| < \varepsilon\right\} = 1 .$$

Але, оскільки X_i приймає тільки два значення (1 і 0), то сума $(X_1 + X_2 + ... + X_n)$ дорівнює числу m появ події в n випробуваннях, тобто $\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} = \frac{m}{n}$.

Отже,

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1 ,$$

що і потрібно було довести.

Зміст теореми полягає в тому, що при необмеженому збільшенні числа експериментів n частота $\frac{m}{n}$ появи події в перших n випробуваннях збігається за ймовірністю до ймовірності успіху в кожному окремому експерименті p.

Таким чином, встановлений зв'язок між частотою події та її ймовірністю: статистичне визначення ймовірності є наслідком закону великих чисел.

7.2. Центральна гранична теорема

Для дослідження вигляду закону розподілу суми випадкових величин $X_1, X_2, ...X_n, ...$ застосовують групу теорем, які мають назву *центральна гранична теорема*. Вони стверджують, що закон розподілу суми випадкових величин, кожна з яких може мати різні розподіли, наближається до нормального при досить великій кількості доданків.

Різні форми центральної граничної теореми розрізняються поміж себе умовами, які накладаються на розподіли випадкових величин, що утворюють суму.

Теорема 7.6. (*теорема Ляпунова*). Якщо $X_1, X_2, ...X_n$ – незалежні випадкові величини, кожна з яких має математичне сподівання $M[X_i]=a_i$, дисперсію $D[X_i]=\sigma_i^2$ і абсолютний центральний момент третього порядку

$$\mu_{3i} = M\left\{\left|X_i - a_i\right|^3\right\}, \quad \text{та існує границя} \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\mu_{3i}}{\left(\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right) = 0 ,$$

то закон розподілу суми випадкових величин $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ при $n \to \infty$ необмежено наближається до нормального з параметрами $M[S_n] = \sum_{i=1}^{n} a_i$, і $D[S_n] = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$.

Центральним граничним теоремам підпорядковані послідовності випадкових величин з різними законами розподілу. На практиці частіше має місце більш простий випадок – послідовності випадкових величин з однаковими законами розподілу або послідовності реалізацій однієї і тієї ж випадкової величини.

Наслідок центральної граничної теореми. Якщо незалежні випадкові величини $X_1, X_2, ...X_n$ *однаково* розподілені і мають математичне сподівання $M[X_i]=a$, та кінцеву дисперсію $D[X_i]=\sigma^2$, то при $n \to \infty$ закон розподілу суми випадкових величин $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ необмежено наближається до нормального з параметрами $M[S_n] = na$ і $D[S_n] = n\sigma^2$.

Таким чином, нормальний розподіл виникає тоді, коли є сума багатьох незалежних (або слабо залежних) випадкових величин, порівняних за ступенем свого впливу на розсіювання суми.

На практиці таки випадки зустрічаються дуже часто: похибки виміру параметрів, помилки спостереження розподілені за нормальним (або близьким до нормального) законом; такі помилки можуть бути представлені у вигляді суми багатьох елементарних помилок, кожна з яких пов'язана з окремою, практично незалежно від інших причиною. Саме в застосуванні до теорії помилок був уперше обґрунтований Лапласом і Гауссом нормальний закон розподілу.

При додаванні величин з однаковим законом розподілу закон розподілу суми можна вважати нормальним, якщо n >10. Однак, практично можна використати центральну граничну теорему і при сумі додатків менше десяти.

Окремим випадком центральної граничної теореми є локальна і інтегральна теоремі Лапласа для дискретних випадкових величин.

Теорема 7.7. **(*локальна гранична теорема Лапласа*).** Якщо ймовірність появи події A в n незалежних випробуваннях постійна і дорівнює p ($0<p<1$), то ймовірність $P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ того, що в цих випробуваннях подія A відбудеться рівно k разів, задовольняє співвідношенню

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_n(k)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{np(1-p)}e^{-x^2/2}} = 1 , \quad \text{де } x = \frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}} .$$

Інакше, біноміальна розподілена випадкова величина асимптотичне розподілена за нормальним законом з параметрами $a = np$ і $\sigma^2 = np(1-p)$.

Теорема 7.8. **(*інтегральна гранична теорема Лапласа*).** Нехай $\boldsymbol{X}$ − біноміальна розподілена випадкова величина з параметрами n і p . Тоді ймовірність $P_n(k_1, k_2)$ того, що в цих випробуваннях подія A відбудеться не менше k_1 і не більше k_2 разів, задовольняє співвідношенню

$$\lim_{n\to\infty} P\left(x_1 \le \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} < x_2 \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-x^2/2} dx = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) ,$$

де $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{np(1-p)}}$; $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}$;

$\Phi(x) = \int_{0_1}^{x} e^{-t^2/2} dt$ − інтеграл (функція) Лапласа (властивості функції Лапласа див. в пункті 3.2.4, Додатки Табл.2).

7.3. Контрольні запитання

1. Навести нерівність Маркова і пояснити її зміст.
2. Навести нерівність Чебишова і пояснити її зміст.
3. Сформулювати закон великих чисел у формі Чебишова.
4. Сформулювати закон великих чисел у формі Хінчіна.
5. Сформулювати закон великих чисел у формі Бернуллі.
6. Що стверджує центральна гранична теорема?
7. Сформулювати теорему Ляпунова.
8. У чому полягає наслідок центральної граничної теореми?
9. Сформулювати локальну граничну теорему Лапласа.
10. Сформулювати інтегральну граничну теорему Лапласа.

.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика – М.: Высшая школа, 2002. – 368 с.
2. *Гмурман В.Е.* Руководство по решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высш. шк., 2000. – 400 с.
3. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей. – М.: Наука, 2000. – 576 с.
4. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Теория вероятностей и ее инженерные приложения – М.:, Наука, 1988. . – 480 с.
5. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А*. Задачи и упражнения по теории вероятностей – М.: Высшая школа, 2000. . – 180 с.
6. *Чистяков В.П.* Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1987.–240 с.
7. *Коваленко И.Н., Гнеденко Б.В.* Теория вероятностей. – К.: Вища шк., 1990. – 328 с.
8. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1988. – 448 с.
9. *Коваленко И.Н., Филиппова А.А.* Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высш.шк., 1973. – 368 с.
10. *Самойленко М.І., Кузнецов А.І., Костенко О.Б.* Теорія ймовірностей: Підручник – Харків: ХНАМГ, 2008. – 194 с.

ДОДАТКИ

Таблиця 1. Значення функції Гаусса $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3652	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3032	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0789	0,0774	0,0759	0,0745	0,0731	0,0718	0,0705	0,0692	0,0680	0,0668
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,00238	0,00231	0,00223	0,0022	0,00216	0,00203	0,00196	0,0019	0,00184	0,00178
3,3	0,00172	0,00167	0,00161	0,00156	0,00151	0,00146	0,00141	0,00136	0,00132	0,00128
3,4	0,00123	0,00119	0,00115	0,00111	0,0011	0,00104	0,0010	0,0010	0,00097	0,00094
3,5	0,00087	0,00084	0,00081	0,00078	0,00076	0,00073	0,00071	0,00068	0,00066	0,00063
3,6	0,00061	0,00059	0,00057	0,00055	0,00053	0,00051	0,00049	0,00047	0,00046	0,00044
3,7	0,00042	0,00041	0,00039	0,00038	0,00037	0,00035	0,00034	0,00033	0,00031	0,00030
3,8	0,00029	0,00028	0,00027	0,00026	0,00025	0,00024	0,00023	0,00022	0,00021	0,00021
3,9	0,0002	0,00019	0,00018	0,00018	0,00017	0,00016	0,00016	0,00015	0,00015	0,00014

1. $\varphi(-x) = \varphi(x)$;
2. $\forall\ |x| \geq 4, \varphi(x) = 0$.

Таблиця 2. Значення функції Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2086	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2640	0,2673	0,2703	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2862
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3061	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3211	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3883	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4665	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4780	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4803	0,4793	0,4798	0,4803	0,4807	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4825	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4861	0,4868	0,4871	0,4875	0,4877	0,4881	0,4884	0,4887	0,4889
2,3	0,4893	0,4895	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4939	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4959	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4980	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4983	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986

1. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$;

2 $\forall |x| > 5, \quad \Phi(x) = 0{,}5$

Продовження **Таблиці 2**. Значення функції Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dt$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,0	0,49865	0,498694	0,498736	0,498777	0,498817	0,498856	0,498893	0,498929	0,498965	0,498999
3,1	0,49903	0,499065	0,499096	0,499126	0,499153	0,499184	0,499211	0,499238	0,499264	0,499289
3,2	0,49931	0,499336	0,499359	0,499381	0,499402	0,499423	0,499443	0,499452	0,499481	0,499499
3,3	0,49952	0,499534	0,499549	0,499564	0,499581	0,499596	0,499610	0,499624	0,499638	0,499651
3,4	0,49966	0,499675	0,499687	0,499698	0,499709	0,499719	0,499730	0,499739	0,499749	0,499759
3,5	0,49977	0,499776	0,499784	0,499792	0,499799	0,49981	0,499815	0,499822	0,499828	0,499835
3,6	0,49985	0,499847	0,499853	0,499858	0,499864	0,499869	0,499874	0,499879	0,499883	0,499888
3,7	0,49989	0,499896	0,499900	0,499904	0,499908	0,499912	0,499915	0,499918	0,499922	0,499925
3,8	0,49993	0,499931	0,499933	0,499936	0,499938	0,499941	0,499943	0,499946	0,499948	0,499949
3,9	0,49995	0,499954	0,499956	0,499958	0,499959	0,499961	0,499963	0,499964	0,499966	0,499967
4,0	0,49997	0,499970	0,499971	0,499972	0,499973	0,499974	0,49976	0,499977	0,499978	0,499978
4,1	0,49998	0,499980	0,499981	0,499982	0,499983	0,499983	0,499984	0,499985	0,499985	0,499986
4,2	0,49998	0,499987	0,499988	0,499988	0,49989	0,499989	0,499989	0,499990	0,499991	0,499991
4,3	0,49999	0,499992	0,499992	0,499993	0,499993	0,499993	0,499994	0,499994	0,499994	0,499994
4,4	0,49999	0,499995	0,99995	0,499995	0,499996	0,499996	0,499996	0,499996	0,499996	0,499996
4,5	0,49999	0,499997	0,499997	0,499997	0,499997	0,499997	0,499997	0,499997	0,499998	0,499998
5,0	0,4999997									

1. $\Phi(-x)=-\Phi(x)$;

2 $\forall|x|>5,\quad \Phi(x)=0{,}5$.

Таблиця 3. Значення функції Пуассона $P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$

	λ							
k	**0,1**	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**
0	0,904837	0,818731	0,740818	0,670320	0,606331	0,548812	0,496585	0,449329
1	0,090484	0,163746	0,222245	0,268128	0,303265	0,329287	0,347610	0,3594463
2	0,004524	0,016375	0,033337	0,053626	0,075816	0,098786	0,121663	0,143785
3	0,000151	0,001062	0,003334	0,007150	0,012636	0,019757	0,028388	0,038343
4	0,000004	0,000055	0,000250	0,000715	0,001580	0,002964	0,004968	0,007669
5	–	0,000002	0,000015	0,000057	0,000158	0,000356	0,000696	0,001227
6	–	–	0,000001	0,000004	0,000013	0,000036	0,000081	0,000164
7	–	–	–	–	0,000001	0,000003	0,000008	0,000019
8	–	–	–	–	–	–	0,000001	0,000002
	λ							
k	**0,9**	**1,0**	**1,5**	**2,0**	**2,5**	**3,0**	**3,5**	**4,0**
0	0,406570	0,367879	0,223130	0,135335	0,82085	0,049787	0,030197	0,018316
1	0,365913	0,367879	0,334695	0,270671	0,205212	0,149361	0,105691	0,073263
2	0,164661	0,183940	0,251021	0,270671	0,256513	0,224042	0,184959	0,146525
3	0,049398	0,061313	0,125510	0,180447	0,213763	0,224042	0,215785	0,195367
4	0,011115	0,015328	0,04067	0,090224	0,133602	0,168031	0,188812	0,195367
5	0,002001	0,003066	0,014120	0,036089	0,066801	0,1000819	0,132169	0,156293
6	0,000300	0,000511	0,003530	0,012030	0,027834	0,050409	0,077098	0,104196
7	0,000039	0,000073	0,000756	0,003437	0,009941	0,021604	0,038549	0,059540
8	0,000004	0,000009	0,000142	0,000859	0,003106	0,008102	0,016865	0,029770
9	–	0,000001	0,000024	0,000191	0,000863	0,002701	0,006559	0,013231
10	–	–	0,000004	0,000038	0,000216	0,000810	0,002296	0,005292
11	–	–	–	0,000007	0,000049	0,000221	0,000730	0,001925
12	–	–	–	0,000001	0,000010	0,000055	0,000213	0,000642
13	–	–	–	–	0,000002	0,000013	0,000057	0,000197
14	–	–	–	–	–	0,000003	0,000014	0,000056
15	–	–	–	–	–	0,000001	0,000003	0,000015
16	–	–	–	–	–	–	0,000001	0,000004
17	–	–	–	–	–	–	–	0,000001
	λ							
	4,5	**5,0**	**6,0**	**7,0**	**8,0**	**9,0**	**10,0**	
0	0,011109	0,006738	0,002479	0,000912	0,000335	0,000123	0,000045	
1	0,049990	0,033690	0,014873	0,006383	0,002684	0,001111	0,000454	
2	0,112479	0,083227	0,044618	0,022341	0,010735	0,004998	0,002270	
3	0,168718	0,140374	0,089235	0,052129	0,028626	0,014994	0,007867	
4	0,189808	0,175467	0,133853	0,091226	0,057252	0,033737	0,018917	
5	0,170827	0,175467	0,160623	0,127717	0,091604	0,060727	0,037833	
6	0,128120	0,146223	0,160623	0,149003	0,122138	0,091090	0,063055	
7	0,082363	0,104445	0,137677	0,149003	0,139587	0,117116	0,090079	
8	0,046329	0,065278	0,103258	0,130377	0,139587	0,131756	0,112599	
9	0,023165	0,036266	0,068838	0,101405	0,124077	0,131756	0,125110	
10	0,010424	0,018133	0,041303	0,070983	0,099262	0,118580	0,125110	
11	0,004264	0,008242	0,022529	0,045171	0,072190	0,097020	0,113736	
12	0,001599	0,003434	0,011264	0,026350	0,048127	0,072765	0,094780	
13	0,000554	0,001321	0,005189	0,014188	0,029616	0,050376	0,072908	

Продовження **Таблиці 3**. Значення функції Пуассона $P_n(k)=\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}$

	λ						
k	**4,5**	**5,0**	**6,0**	**7,0**	**8,0**	**9,0**	**10,0**
14	0,000178	0,000472	0,002228	0,007094	0,016924	0,032384	0,052077
15	0,000053	0,000157	0,000891	0,003311	0,009026	0,019431	0,034718
16	0,000015	0,000049	0,000334	0,001448	0,004513	0,010930	0,021689
17	0,000004	0,000014	0,00018	0,000596	0,002124	0,005786	0,012764
18	0,000001	0,000004	0,000039	0,000232	0,0000944	0,002893	0,007091
19	–	0,000001	0,000012	0,000085	0,000397	0,001370	0,003732
20	–	–	0,000004	0,000030	0,000159	0,000617	0,001866
21	–	–	0,000001	0,000010	0,000061	0,000264	0,000889
22	–	–	–	0,000003	0,000022	0,000108	0,000404
23	–	–	–	0,000001	0,000008	0,000042	0,000176
24	–	–	–	–	0,000003	0,000016	0,000073
25	–	–	–	–	0,000001	0,000006	0,000029
26	–	–	–	–	–	0,000002	0,000011
27	–	–	–	–	–	0,000001	0,000004
28	–	–	–	–	–	–	0,000001
29	–	–	–	–	–	–	0,000001

Таблиця 4. Квантілі розподілу Стьюдента $\boldsymbol{t_\varepsilon(n-1)}$,

які задовольняють рівнянню $\mathbf{2}\int_0^{t_\varepsilon(n-1)} p_{\tau_{n-1}}(x)dx = 1-\varepsilon$, де $p_{\tau_{n-1}}(x)$ – щільність розподілу Стьюдента з $\boldsymbol{n-1}$ ступенями свободи.

n	$t_{0.1}(n-1)$	$t_{0.1}(n-1)/\sqrt{n}$	$t_{0.05}(n-1)$	$t_{0.05}(n-1)/\sqrt{n}$	$t_{0.01}(n-1)$	$t_{0.01}(n-1)/\sqrt{n}$
2	6.3138	4.4645	12.7062	8.9846	63.6567	45.0121
3	2.9200	1.6859	4.3027	2.4842	9.9248	5.7301
4	2.3534	1.1767	3.1824	1.5912	5.8409	2.9204
5	2.1318	0.9534	2.7764	1.2416	4.6041	2.0590
6	2.0105	0.8226	2.5706	1.0494	4.0321	1.6461
7	1.9432	0.7345	2.4469	0.9248	3.7074	1.4013
8	1.8946	0.6698	2.3646	0.8360	3.4995	1.2373
9	1.8595	0.6198	2.3060	0.7687	3.3554	1.1185
10	1.8331	0.5719	2.2622	0.7154	3.2498	1.0277
11	1.8125	0.5465	2.2281	0.6718	3.1693	0.9556
12	1.7959	0.5184	2.2010	0.6354	3.1058	0.8966
13	1.7823	0.4943	2.1788	0.6043	3.0545	0.8472
14	1.7709	0.4733	2.1604	0.5774	3.0123	0.8051
15	1.7613	0.4548	2.1448	0.5534	2.9768	0.7686
16	1.7530	0.4382	2.1314	0.5328	2.9467	0.7367
17	1.7459	0.4234	2.1199	0.5142	2.9208	0.7084
18	1.7396	0.4100	2.1098	0.4973	2.8982	0.6831
19	1.7341	0.3978	2.1009	0.4820	2.8784	0.6604
20	1.7291	0.3866	2.0930	0.4680	2.8609	0.6397
21	1.7247	0.3764	2.0860	0.4552	2.8453	0.6204
22	1.7207	0.3669	2.0796	0.4434	2.8314	0.6037
23	1.7171	0.3580	2.0739	0.4324	2.8188	0.5878
24	1.7139	0.3498	2.0687	0.4224	2.8073	0.5730
25	1.7109	0.3422	2.0639	0.4129	2.7969	0.5535
26	1.7081	0.3350	2.0595	0.4039	2.7874	0.5467
27	1.7056	0.3282	2.0555	0.3956	2.7787	0.5348
28	1.7033	0.3219	2.0518	0.3878	2.7707	0.5236
29	1.7011	0.3159	2.0484	0.3804	2.7633	0.5131
30	1.6991	0.3102	2.0452	0.3734	2.7564	0.5032
32	1.6956	0.2997	2.0396	0.3606	2.7442	0.4851
35	1.6909	0.2858	2.0322	0.3435	2.7284	0.4612
40	1.6849	0.2664	2.0227	0.3198	2.7083	0.4282

Граничні значення $t_\varepsilon(n-1)$ при $n\to+\infty$:

$$t_{0.1}(+\infty)=1.6449,\quad t_{0.05}(+\infty)=1.9600,\quad t_{0.01}(+\infty)=2.5758.$$

Вони є коренями рівняння $2\Phi(\delta_\varepsilon)=1-\varepsilon$ при $\varepsilon=0.1,\ 0.05,\ 0.01.$

Таблиця 5. Квантілі розподілу Пірсона $\chi^2(\varepsilon)$

Значення $\chi^2(\varepsilon)$, які задовольняють рівнянню $P\{\chi_k^2 > \chi_k^2(\varepsilon)\} = \int_{\chi_k^2(\varepsilon)}^{+\infty} p_{\chi_k^2}(x)dx = \varepsilon$, де $p_{\chi_k^2}(x)$ – щільність розподілу χ^2 з k ступенями свободи.

k	χ_k^2(**0,1**)	χ_k^2(**0,05**)	χ_k^2(**0,01**)
1	2.71	3.84	6.63
2	4.61	5.99	9.21
3	6.25	7.81	11.3
4	7.78	9.49	13.3
5	9.24	11.1	15.1
6	10.6	12.6	16.8
7	12.0	14.1	18.5
8	13.4	15.5	20.1
9	14.7	16.9	21.7
10	16.0	18.3	23.2
11	17.3	19.7	24.7
12	18.5	21.0	26.2
13	19.8	22.4	27.7
14	21.1	23.7	29.1
15	22.3	25.0	30.6
16	23.5	26.3	32.0
17	24.8	27.6	33.4
18	26.0	28.9	34.8
19	27.2	30.1	36.2
20	28.4	31.4	37.6
21	29.6	32.7	38.9
22	30.8	33.9	40.3
23	32.0	35.2	41.6
24	33.2	36.4	43.0
25	34.4	37.7	44.3
30	40.3	43.8	50.9
35	46.1	49.8	57.3
40	51.8	55.8	63.7

Таблиця 6. Квантілі розподілу Фішера $F_{nm}(\varepsilon)$,

Значення $F_{nm}(\varepsilon)$, які задовольняють рівнянню $\int\limits_{F_{n,m}(\varepsilon)}^{+\infty} p_{F_{n,m}}(x)\,dx = \varepsilon$, де $p_{F_{n,m}}(x)$ – щільність ймовірності розподілу Фішера з $\boldsymbol{n}$ і $\boldsymbol{m}$ ступенями свободи (**n** – кількість ступенів свободи для більшої дисперсії).

Рівень значущості $\varepsilon = \mathbf{0.05}$

	Кількість ступенів свободи для більшої дисперсії															
m \ ***n***	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,41	19,43	19,45	19,45	19,46	19,47
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79

Рівень значущості **ε=0.025**

	Кількість ступенів свободи для більшої дисперсії															
n / ***m***	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**
2	38,51	39,00	39,17	39,25	39,30	39,33	39,36	39,37	39,39	39,40	39,41	39,43	39,45	39,46	39,46	39,47
3	17,44	16,04	15,44	15,10	14,88	14,73	14,62	14,54	14,47	14,42	14,34	14,25	14,17	14,12	14,08	14,04
4	12,22	10,65	9,98	9,60	9,36	9,20	9,07	8,98	8,90	8,84	8,75	8,66	8,56	8,51	8,46	8,41
5	10,01	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,85	6,76	6,68	6,62	6,52	6,43	6,33	6,28	6,23	6,18
6	8,81	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,70	5,60	5,52	5,46	5,37	5,27	5,17	5,12	5,07	5,01
7	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	4,99	4,90	4,82	4,76	4,67	4,57	4,47	4,41	4,36	4,31
8	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,53	4,43	4,36	4,30	4,20	4,10	4,00	3,95	3,89	3,84
9	7,21	5,71	5,08	4,72	4,48	4,32	4,20	4,10	4,03	3,96	3,87	3,77	3,67	3,61	3,56	3,51
10	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,95	3,85	3,78	3,72	3,62	3,52	3,42	3,37	3,31	3,26
11	6,72	5,26	4,63	4,28	4,04	3,88	3,76	3,66	3,59	3,53	3,43	3,33	3,23	3,17	3,12	3,06
12	6,55	5,10	4,47	4,12	3,89	3,73	3,61	3,51	3,44	3,37	3,28	3,18	3,07	3,02	2,96	2,91
13	6,41	4,97	4,35	4,00	3,77	3,60	3,48	3,39	3,31	3,25	3,15	3,05	2,95	2,89	2,84	2,78
14	6,30	4,86	4,24	3,89	3,66	3,50	3,38	3,29	3,21	3,15	3,05	2,95	2,84	2,79	2,73	2,67
15	6,20	4,77	4,15	3,80	3,58	3,41	3,29	3,20	3,12	3,06	2,96	2,86	2,76	2,70	2,64	2,59
16	6,12	4,69	4,08	3,73	3,50	3,34	3,22	3,12	3,05	2,99	2,89	2,79	2,68	2,63	2,57	2,51
17	6,04	4,62	4,01	3,66	3,44	3,28	3,16	3,06	2,98	2,92	2,82	2,72	2,62	2,56	2,50	2,44
18	5,98	4,56	3,95	3,61	3,38	3,22	3,10	3,01	2,93	2,87	2,77	2,67	2,56	2,50	2,44	2,38
19	5,92	4,51	3,90	3,56	3,33	3,17	3,05	2,96	2,88	2,82	2,72	2,62	2,51	2,45	2,39	2,33
20	5,87	4,46	3,86	3,51	3,29	3,13	3,01	2,91	2,84	2,77	2,68	2,57	2,46	2,41	2,35	2,29
25	5,69	4,29	3,69	3,35	3,13	2,97	2,85	2,75	2,68	2,61	2,51	2,41	2,30	2,24	2,18	2,12
30	5,57	4,18	3,59	3,25	3,03	2,87	2,75	2,65	2,57	2,51	2,41	2,31	2,20	2,14	2,07	2,01

Таблиця 7. Значення функції e^{-x}

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	1,00000	0,99005	0,98020	0,97045	0,96079	0,95123	0,94176	0,93239	0,92312	0,91393
0,1	0,90484	0,89583	0,88692	0,87810	0,86936	0,86071	0,85214	0,84366	0,83527	0,82696
0,2	0,81873	0,81058	0,80252	0,79453	0,78663	0,77880	0,77105	0,76338	0,75578	0,74826
0,3	0,74082	0,73345	0,72615	0,71892	0,71177	0,70469	0,69768	0,69073	0,68386	0,67706
0,4	0,67032	0,66365	0,65705	0,65051	0,64404	0,63763	0,63128	0,62500	0,61878	0,61263
0,5	0,60653	0,60050	0,59452	0,58860	0,58275	0,57695	0,57121	0,56553	0,55990	0,55433
0,6	0,54881	0,54335	0,53794	0,53259	0,52729	0,52205	0,21685	0,51171	0,50662	0,50158
0,7	0,49659	0,49164	0,48675	0,48191	0,47711	0,47237	0,46767	0,46301	0,45841	0,45384
0,8	0,44933	0,44486	0,44043	0,43605	0,43171	0,42741	0,42316	0,41895	0,41478	0,41066
0,9	0,40657	0,40252	0,39852	0,39455	0,39063	0,38674	0,38289	0,37908	0,37531	0,37158
1,0	0,36788	0,36422	0,36060	0,35701	0,35345	0,34994	0,34646	0,34301	0,33960	0,33622
1,1	0,33287	0,32956	0,32628	0,32303	0,31982	0,31664	0,31349	0,31037	0,30728	0,30422
1,2	0,30119	0,29820	0,29523	0,29229	0,28938	0,28650	0,28365	0,28083	0,27804	0,27527
1,3	0,27253	0,26982	0,26714	0,26448	0,26185	0,25924	0,25666	0,25411	0,25158	0,24908
1,4	0,24660	0,24414	0,24171	0,23931	0,23693	0,23457	0,23224	0,22993	0,22764	0,22537
1,5	0,22312	0,22091	0,21871	0,21654	0,21438	0,21225	0,21014	0,20805	0,20598	0,20393
1,6	0,20190	0,19989	0,19790	0,19593	0,19398	0,19205	0,19014	0,18825	0,18637	0,18452
1,7	0,18268	0,18087	0,17907	0,17728	0,17552	0,17377	0,17204	0,17033	0,16864	0,16696
1,8	0,16530	0,16365	0,16203	0,16041	0,15882	0,15724	0,15567	0,15412	0,15259	0,15107
1,9	0,14957	0,14808	0,14661	0,14515	0,14370	0,14227	0,14086	0,13946	0,13807	0,13670
2,0	0,13534	0,13399	0,13266	0,13134	0,13003	0,12873	0,12745	0,12619	0,12493	0,12369
2,1	0,12246	0,12124	0,12003	0,11884	0,11756	0,11648	0,11533	0,11418	0,11304	0,11192
2,2	0,11080	0,10970	0,10861	0,10753	0,10646	0,10540	0,10435	0,10331	0,10228	0,10127
2,3	0,10026	0,09926	0,09827	0,09730	0,09633	0,09537	0,09442	0,09348	0,09255	0,09163
2,4	0,09072	0,08982	0,08892	0,08804	0,08716	0,08629	0,08543	0,08454	0,08374	0,08291
2,5	0,08208	0,08127	0,08046	0,07966	0,07887	0,07808	0,07730	0,07654	0,07577	0,07502
2,6	0,07427	0,07353	0,07280	0,07208	0,07136	0,07065	0,06995	0,06925	0,06856	0,06788
2,7	0,06421	0,06654	0,06587	0,06522	0,06457	0,06393	0,06329	0,06266	0,06204	0,06142
2,8	0,06081	0,06020	0,05961	0,05901	0,05843	0,05784	0,05727	0,05670	0,05613	0,05559
2,9	0,05502	0,05448	0,05393	0,05340	0,05287	0,05234	0,05182	0,05130	0,05079	0,05029
3,0	0,04979	0,04929	0,04880	0,04832	0,04783	0,04736	0,04689	0,04642	0,04596	0,04550
3,1	0,04505	0,04460	0,04416	0,04372	0,04328	0,04285	0,04243	0,04200	0,04159	0,04117
3,2	0,04076	0,04036	0,03996	0,03956	0,03916	0,03877	0,03839	0,03801	0,03763	0,03725
3,3	0,03688	0,03652	0,03615	0,03579	0,03544	0,03508	0,03774	0,03439	0,03405	0,03371
3,4	0,03337	0,03304	0,03271	0,03239	0,03206	0,03175	0,03143	0,03112	0,03081	0,03050
3,5	0,03020	0,02990	0,02960	0,02930	0,02901	0,02872	0,02844	0,02816	0,02788	0,02760
3,6	0,02732	0,02705	0,02678	0,02652	0,02625	0,02599	0,02573	0,02548	0,02522	0,02497
3,7	0,02472	0,02448	0,02423	0,02399	0,02375	0,02352	0,02328	0,02305	0,02282	0,02260
3,8	0,02237	0,02215	0,02193	0,02171	0,02149	0,02128	0,02107	0,02086	0,02065	0,02045
3,9	0,02024	0,02004	0,01984	0,01964	0,01945	0,01925	0,01906	0,01887	0,01869	0,01850
4,0	0,01832	0,01657	0,01500	0,01357	0,01228	0,01111	0,01005	0,00909	0,00823	0,00745
5,0	0,00674	0,00610	0,00552	0,00500	0,00452	0,00409	0,00370	0,00335	0,00303	0,00274
6,0	0,00248	0,00224	0,00203	0,00184	0,00166	0,00150	0,00136	0,00123	0,00111	0,00101
7,0	0,00091	0,00083	0,00075	0,00068	0,00061	0,00055	0,00050	0,00045	0,00041	0,00037
8,0	0,00034	0,00030	0,00027	0,00025	0,00023	0,00020	0,00018	0,00017	0,00015	0,00014
9,0	0,00012	0,00011	0,00010	0,00009	0,00008	0,00008	0,00007	0,00006	0,00006	0,00005
10,0	0,00005									

Додаток А. Основні формули диференціального числення

Правила диференціювання

$c' = 0$

$(u \cdot v)' = u'v + uv'$

$(cu)' = cu'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u \pm v)' = u \pm v$

$\left(f(u)\right)_x' = f_u' \cdot u_x'$

Тут $c = const.$, $u = u(x)$, $v = v(x)$.

Основні формули диференціювання

$\left(u^n\right)' = nu^{n-1}u', \quad n \in \mathbf{R}$

$\left(\log_a u\right)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$\left(a^u\right)' = a^u \ln a \cdot u'$

$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$

$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$

$(\mathrm{tgu})' = \dfrac{1}{\cos^2 u}u'$

$(\mathrm{ctg}\, u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u}u'$

$(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$

$(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$

$(\mathrm{arctgu})' = \dfrac{1}{1+u^2}u'$

$(\mathrm{arcctg}\, u)' = -\dfrac{1}{1+u^2}u'$

Тут $u = u(x)$.

Додаток В. Основні формули інтегрального числення

Правила інтегрування

1. $\int a\, f(x)dx = a\int f(x)dx$.
2. $\int (u \pm v)dx = \int u\, dx \pm \int v\, dx.$
3. Якщо $x = \varphi(t)$, то $\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\cdot \varphi'(t)dt$.

Таблиця невизначених інтегралів

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C$$

$$\int \mathrm{tg}\, x\, dx = -\ln\cos x + C$$

$$\int \mathrm{ctg}\, x\, dx = \ln\sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C \quad (|x| < a)$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \quad (|x| > a)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2-a^2}\right) + C$$

Формула інтегрування частинами

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du .$$

($u(x)$, $v(x)$ − диференційовані функції).

Додаток С. Грецький і латинський алфавіти

ГРЕЦЬКИЙ АЛФАВІТ

Буква	Назва букви російською мовою	Буква	Назва букви російською мовою
Αα	альфа	Νν	ню
Ββ	бета	Ξξ	кси
Γγ	гамма	Οο	омикрон
Δδ	дельта	Ππ	пи
Εε	эпсилон	Ρρ	ро
Ζζ	дзэта	Σσ	сигма
Ηη	эта	Ττ	тау
Θθ	тхэта	Υυ	ипсилон
Ιι	йота	Φφ	фи
Κκ	каппа	Χχ	хи
Λλ	ламбда	Ψψ	пси
Μμ	мю	Ω ω	омега

ЛАТИНСЬКИЙ АЛФАВІТ

Буква	Назва букви російською мовою	Буква	Назва букви російською мовою
Aa	а	Nn	эн
Bв	бэ	Oo	о
Cc	цэ	Pp	пэ
Dd	дэ	Qq	ку
Ee	э	Rr	эр
Ff	эф	Ss	эс
Gg	гэ	Tt	тэ
Hh	ха	Uu	у
Ii	и	Vv	вэ
Jj	йот	Ww	дубль-вэ
Kk	ка	Xx	икс
Ll	эль	Yy	игрек
Mm	эм	Zz	зэт

Додаток D. Деякі сталі

(з точністю до 0,0001)

$\pi = 3{,}1416$	$e = 2{,}7183$
$2\pi = 6{,}2832$	$e^2 = 7{,}3891$
$3\pi = 9{,}4248$	$\sqrt{e} = 1{,}6487$
$4\pi = 12{,}5664$	$\sqrt[3]{e} = 1{,}3956$
$\frac{\pi}{2} = 1{,}5702$	$\frac{1}{e} = 0{,}3679$
$\frac{\pi}{3} = 1{,}0472$	$\frac{1}{e^2} = 0{,}1353$
$\frac{\pi}{4} = 0{,}7854$	$\lg e = 0{,}4343$
$\frac{\pi}{6} = 0{,}5236$	$\ln 10 = 2{,}3026$
$\frac{1}{\pi} = 0{,}3183$	$\ln 2 = 0{,}6931$
$\pi^2 = 9{,}8696$	$\ln 3 = 1{,}0986$
$\pi^3 = 31{,}0063$	$\ln 4 = 1{,}3863$
$\pi^4 = 97{,}4091$	$\ln 5 = 1{,}6094$
$\sqrt{\pi} = 1{,}7725$	$\ln 6 = 1{,}7918$

$\sqrt{2} = 1{,}4142$	$\sqrt{6} = 2{,}4495$
$\sqrt{3} = 1{,}7321$	$\sqrt{7} = 2{,}6458$
$\sqrt{5} = 2{,}2361$	$\sqrt{10} = 3{,}1623$

$0! = 1$	$6! = 720$
$1! = 1$	$7! = 5040$
$2! = 2$	$8! = 40320$
$3! = 6$	$9! = 362880$
$4! = 24$	$10! = 3628800$
$5! = 120$	$11! = 39916800$

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

БУЛАЄНКО МАРИНА ВОЛОДИМИРІВНА

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Конспект лекцій

з дисципліни “ Теорія ймовірностей та математична статистика ”

для студентів 2 курсу денної і заочної форм навчання
освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр, напряму підготовки
6.070101 “Транспортні технології (за видами транспорту)”

Редактор: *М. З. Аляб’єв*

План 2009, поз. 188Л

Підп. до друку 28.06.09 Формат 60x84 1/16
Друк на ризографі. Ум. друк. арк. 4,5
Зам.№ Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківська національна академія міського господарства,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи:
ДК №731 від 19.12.2001